Module : Analyse fonctionnelle appliquée 5/6/20
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Réponses Série 4 (exos 2 et 3)

Excercice 2.

– 1- Comme $\int_0^1 |u'|^2 dx \geq \int_0^1 |u|^2 dx$, alors

$$a(v,v) \geq (p_0\|v'\|_{L^2}^2 + \lambda\|v\|_{L^2}^2) \geq p_0\|v\|_V^2$$

avec $p_0 = \min p(x) > 0$. La forme bilinéaire a est coercive si $\lambda \geq 0$ et $p(x) > 0$. Donc on a existence et unicité.

– 2- la solution $u \in H^2(0,1)$. L'équation variationnelle entraine

$$D(pDu) = pD^2u + p'Du = (\lambda u - f) \in L^2(0,1)$$

Donc

$$D^2u = \frac{1}{p(x)}(-p'Du - f + \lambda u) \in L^2 \Rightarrow u \in H^2(0,1)$$

(D désigne la dérivée faible).

– 3- On vient de résoudre le problème aux limites

$$-(pu')' + \lambda u = f, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Excercice 3. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$ et $(\lambda \geq 0)$. Considérons le problème (mêlé)

$$(P_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \qquad -\Delta u + \lambda u = f, \\ \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \gamma_1(u)|_{\Gamma_1} = g. \end{array} \right.$$

Le Problème (P_4) est équivalent à : trouver $u \in V = \{v \in H^1(\Omega);\ \ v|_{\Gamma_0}\}$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = L(v)$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \lambda uv)dx$ et $L(v) = \int_0^1 fvdx + \int_{\Gamma_1} gvds$. V est un sous-espace fermé de $H^(\Omega)$, donc un espace de Hilbert.

– a(u,v) est coercive. On a l'inégalité de Poincaré-Friedrich : il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma_0)}^2),\ \forall v \in H^1(\Omega)$$

d'où

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min(\lambda, \tfrac{1}{C})\|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

– L est borné.

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)})\|v\|_{H^1(\Omega)} \ \ (\textit{continuite de la trace}) \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'existence et l'unicité d'une solution de (P4).

Remarque 1 *Pour la formulation varialionnelle on a utilisé le fait que* $u \in H^2(\Omega)$. *En fait* $u \in H^1(\Delta,\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, *dans ce cas on peut utiliser la formule de Green généralisée (voir chapitre 3, remarque 4).*