UNIVERSITÉ DE ANNABA
DÉPARTEMENT DE MIAS
Année 2009-2010

Module: $\mathscr{A}$lgèbre 2
$\mathscr{D}$urée: 1h30

**Sujet d'examen**

## Exercice 1

**(I)** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, montrer que si les vecteurs $u$ $v$, $w$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{E}$, il en est de même pour les vecteurs $u+v$, $v+w$, $w+u$.

**(II)** Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs:

$$(2,-1,2),\ (-1,1,-1),\ (-1,2,-1),$$

**(1)** Donner une base pour $F$ et déterminer sa dimension;

**(2)** Compléter la base de $F$ de façon à obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

## Exercice 2

Soit $f$ l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f$(x,y,z)=(x+y+z,2x+z,2x+y)

**(a)** Déterminer $\ker f$ (base et dimension);

**(b)** Montrer que $f$ est bijective;

**(c)** Déduire le rang de $f$.

**(d)** Déterminer la matrice $A$ associée à $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

**(e)** Déduire que $A$ est inversible;

**(f)** Déterminer la matrice associée à $f^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

## Exercice 3

Soit $f$ l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z,t) = (x+y-z+2t, x-2y-z+2t, x+y+z+2t)$$

**(1)** Déterminer Im$g$. Déterminer une base de Im$g$ ainsi que sa dimension.

**(2)** Déduire que $g$ est surjective.

**(3)** Est-ce que l'application $g$ peut-être bijective? pourquoi?

## Exercice 4

Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} x+3y+\alpha z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ -x+y &= 3 \end{aligned} \qquad (\mathscr{S})$$

**(1)** Ecrire $\mathscr{S}$ sous la forme matricielle.

**(2)** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\mathscr{S}$ soit de Cramer. Résoudre dans ce cas $\mathscr{S}$.

$\mathscr{B}$on courage

♦$\mathscr{B}$arème: exercice 1 (5pts); exercice 2 (6.5pts); exercice 3 (4.5pts) ; exercice 4 (4pts).