ALGÈBRE 2

Durée: 1h30

Sujet d'examen

Exercice I (5pts)

(I)Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est noté par $0_{\mathbb{E}}$. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{E}$.
-Montrer que $V_1 \cap V_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

(II)Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels de dimensions finies telles que $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
-Montrer que f est bijective si et seulement si elle est injective.

Exercice II (8pts)

Soit l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x,y,z) = (3x - y + z, -x - 2y - 5z, x + y + 3z).$$

(1) Déterminer $\ker f$. Donner une base de $\ker f$ et en déduire sa dimension;
(2) Déterminer la dimension de Imf puis Imf. Donner une base de Imf;
(3) Compléter la base de Imf en une base de $\mathbb{R}^3$;
(4) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;
(5) Est-ce que A est inversible? Justifiez votre réponse (sans calculer le déterminant de A).

Exercice III (7pts)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

(1) Montrer que $A - A^2 + 2I_3 = 0$;
(2) Déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
(3)Soit le système linéaire:

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{array}{lll} & ay & +a^2 z & = a^2, \\ \frac{1}{a}x & & +az & = 0 \\ \frac{1}{a^2}x & +\frac{1}{a}y & & = 2 \end{array}$$

(i) Ecrire le système $(\mathscr{S})$ sous la forme matricielle;
(ii) Montrer que le système $(\mathscr{S})$ est de Cramer;
(iii) Résoudre le système $(\mathscr{S})$.

Bon courage

► N.B Documents, calculatrices et portables interdits

Départ de MIAS
Algèbre 2

Examen 2008 / 2009

Corrigé de l'examen

Exercice 1

I $V_1 \cap V_2 \underset{s.ev}{\subset} E \iff \begin{cases} \text{i) } V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \\ \text{ii) } \forall u, u' \in V_1 \cap V_2,\ u + u' \in V_1 \cap V_2 \\ \text{iii) } \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall u \in V_1 \cap V_2,\ \lambda . u \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$ 0,5

i) $0_E \in V_1$ car $V_1 \underset{s.ev}{\subset} E$

$0_E \in V_2$ car $V_2 \underset{s.ev}{\subset} E$

$\Rightarrow 0_E \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ 0,5

ii) Soient $u, u' \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} u \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow u \in V_1 \text{ et } u \in V_2 \\ u' \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow u' \in V_1 \text{ et } u' \in V_2 \end{cases}$ 0,25

$\Rightarrow \begin{cases} u + u' \in V_1 & \text{car } V_1 \text{ est s.e.v de } E \\ u + u' \in V_2 & \text{'' } V_2 \text{ '' '' ''} \end{cases}$

$\Rightarrow u + u' \in V_1 \cap V_2$ 0,75

iii) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V_1 \cap V_2$

1 $u \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow u \in V_1 \Rightarrow \lambda . u \in V_1$ car V_1 est un s.e.v

$u \in V_2 \Rightarrow \lambda . u \in V_2$ '' V_2 ''

$\Rightarrow \lambda u \in V_1 \cap V_2$

d'ou $V_1 \cap V_2$ est un s.e.v de E.

Ex 1 :

Examen 2008/2009

IV $f : E \longrightarrow F$

$\dim E = \dim F$

la premier implication est evidente

Montrons que si f est injective alors elle est bijective

Soit f injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ car f est lineaire. 0,5

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$ 0,25

D'aprés le théoréme du rang on a :

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ 0,5

$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim F$ 0,25

$\operatorname{Im} f \underset{s.ev}{\subset} F$

$\dim F = \dim \operatorname{Im} f$ $\Rightarrow \operatorname{Im} f = F \Rightarrow f$ est surjective 0,5

d'où elle est bijective.

Exercice 2

Examen 2008/2009

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (3x-y+z, -x-2y-5z, x+y+3z)$

1) $\ker f = \{ u \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$ 0,5

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (3x-y+z, -x-2y-5z, x+y+3z) = (0,0,0) \}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=0 & (1) \\ -x-2y-5z=0 & (2) \\ x+y+3z=0 & (3) \end{cases}$ $(1)+(2)$ $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=-2z}$

$\Rightarrow 3x+2z+z=0 \Rightarrow 3x+3z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$

$\Rightarrow \ker f = \{ (-z, -2z, z) / z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ z\underbrace{(-1,-2,1)}_{u} / z \in \mathbb{R} \}$ 0,5

$\Rightarrow u = (-1,-2,1)$ engendre ~~(-1,~~ $\ker f$ 0,25

$\Rightarrow (u)$ est une base pour $\ker f$, 0,25

$\dim \ker f = \operatorname{card}\{u\} = 1$ 0,5

2) $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ (0,5)

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2.$ 0,5

Examen 2008/2009

$\mathrm{Im} f = \{ v \in \mathbb{R}^3, \exists u \in \mathbb{R}^3 : v = f(u) \}$

$= \{ f(u) \, / \, u \in \mathbb{R}^3 \}$ 0,5

$= \{ (3x - y + z, -x - 2y - 5z, x + y + 3z) \, / \, x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (3x, -x, x) + (-y, -2y, y) + (z, -5z, 3z) \, / \, x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x \underbrace{(3, -1, 1)}_{v_1} + y \underbrace{(-1, -2, 1)}_{v_2} + z \underbrace{(1, -5, 3)}_{v_3} \, / \, x, y, z \in \mathbb{R} \}$ 0,5

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ engendre $\mathrm{Im} f$ 0,25

Comme $\dim \mathrm{Im} f = 2 \Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ est liée. 0,25

On choisit deux vecteurs parmi les trois et on montre qu'ils sont linéairement indépendants.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \lambda_1 (3, -1, 1) + \lambda_2 (-1, -2, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 0,5

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ est libre 0,25

donc elle forme une base de $\mathrm{Im} f$ 0,25

Examen 2008/2009

3) pour compléter la base de Imf on ajoute un vecteur à la famille (v_1, v_2) de tel sorte à ~~obo~~ obtenir une famille libre Soit $v_3 = (1,0,0)_e = e_1$

Montrons que (v_1, v_2, v_3) est libre

Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$: $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\beta_1 (3,-1,1) + \beta_2(-1,-2,1) + \beta_3(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ -\beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

1

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ est libre donc elle ~~forme~~ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) 0,25 $f(e_1) = (3,-1,1)$ ~~0,25~~

0,25 $f(e_2) = (-1,-2,1)$ ~~0,25~~

0,25 $f(e_3) = (1,-5,3)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ 0,5

A ~~n'est pas~~

f n'est pas injective car $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow$

f n'est pas bijective $\Leftrightarrow$ A n'est pas inversible. 1

Exercice 3

Examen 2008/2009

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \qquad 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$A - A^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$A - A^2 + 2I_3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3 \\ \frac{1}{2}(A - I_3) \cdot A = I_3 \end{array} \right\} \quad 0,5$$

$\Rightarrow$ A est inversible. 0,5

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix} \quad 1$$

3) $(S) \Leftrightarrow AU = V$ 0,5

Examen 2008/2009

où $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\det A = 2$

ii) D'après 2) A est inversible donc (S) est de Cramer $\Leftrightarrow$ Il admet une solution unique 1

iii) Sa solution est donnée par

$AU = V \Leftrightarrow U = A^{-1}V$ 0,5

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^2 \\ 3a \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1