

Durée :1h30

30 /06/2012

EXAMEN

Exercice1 : Soit f une fonction définie et continue sur $[-a, a]$, $a > 0$.

1. Montrer que si f est impaire sur $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
2. Calculer $\int_{-5}^5 x^4 \operatorname{Arc} \tan x \cdot dx$

Exercice2 : Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = \lambda := \text{constante}$.

Montrer que f est Riemann intégrable et $\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$.

Exercice3 : Calculer par deux méthodes différentes l'intégrale suivante : $\int x e^{x^2} dx$; $x > 0$

Exercice4 : Calculer :

- i. $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$
- ii. $I_2 = \int \frac{dx}{1+x^3}$

Exercice5 : Intégrer les équations différentielles suivantes :

- i. $(\cos x)y' + (\sin x)y = x$
- ii. $4y'' - 4y' + y = 0$.
- iii. $y'' - y' + y = 0$

Barème : Exo1 : 3 points.
Exo2 : 2 points.
Exo3 : 3 points.
Exo4 : 5 points.
Exo5 : 6 points.

Bonne chance... !

 **N.B:** Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

EX(1):-

1. $f \in C^0[-a, a] \Rightarrow f$ Riemann intégrable sur $[-a, a]$.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= - \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0\end{aligned}$$

(2pt)

2. $x \mapsto x^4$ Autant x est impaire sur $[-5, 5]$
 $\Rightarrow \int_{-5}^5 x^4 \text{ Autant } x dx = 0$

(1pt)

EX(2):- Soit le sommes de Darbeaux

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a)$$

$$D(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a)$$

où $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$; σ une subdivision de $[a, b]$

on a :

$S(\sigma) = D(\sigma) \Rightarrow f$ Riemann intégrable sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = S(\sigma) = D(\sigma) = \lambda(b-a)$$

(1pt)

EX(3):- Méthode 1:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int [e^{x^2}]' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$P = \frac{1}{4}$

Méthode 2: on pose $x = \sqrt{t} \Rightarrow \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$
 $= \frac{1}{2} e^x + C$

EX(4):

i- on pose $u = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \Rightarrow$

$I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left[\ln u - \ln(u+1) \right]_1^e = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$ (1pt)

ii- on a $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2-x}{x^2-x+1}$ (1pt)

$I_2 = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{2-x}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$; on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t$

$\int \frac{2-x}{x^2-x+1} dx = \int \frac{\sqrt{3}-t}{1+t^2} dt = \sqrt{3} \operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C$
 $= \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + C$

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ (2pt)

EX(5):

i. $(\cos x) y' + (\sin x) y = x$ (E)

① Solution générale de l'équation homogène:

$(\cos x) y' + (\sin x) y = 0$ (H)

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = - \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\Rightarrow \boxed{y = C \cdot \cos x}$ (1pt)

② Solution particulière de (E):

$P = \frac{2}{x}$

Méthode de la variation de la constante:

on pose :

$$y(x) = C(x) \cdot \cos x$$

$$(E) \Rightarrow C'(x) \cos^2 x - C(x) \sin x \cdot \cos x + C(x) \sin x \cdot \cos x = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$= x \tan x - \int \tan x dx \quad (\text{Par parties})$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = (x \tan x + \ln |\cos x|) \cos x} \quad \text{solution particulière de (E)} \quad (1 \text{ pt})$$

$$\boxed{y_0(x) = (x \tan x + \ln |\cos x|) \cos x = x \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x|}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x| + C \cdot \cos x}$$

↳ solution générale de (E).

(1 pt)

ii- $4y'' - 4y' + y = 0$

Eq. caractéristique: $4r^2 - 4r + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow \exists r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = (Ax + B)e^{\frac{1}{2}x}$

1pt

0,5pt

(iii) $y'' - y' + y = 0$

Eq. caractéristique: $r^2 - r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$\Rightarrow \exists$ deux racines complexes ~~conjugées~~ conjuguées

$r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y = \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) e^{\frac{1}{2}x}$

1pt

Fin

✓