Module : Analyse 2 : 2013-2014
$1^{\text{ième}}$ Année Maths et Informatique

Examen semestriel
Durée : 1h30

Exercice 1 : (6 points)

a) Déterminer le D. L. de $f(x) = \cosh x$ d'ordre n au voisinage de 0 puis le D. L. de $g(x) = x^3$ d'ordre 3 au voisinage de 1.
b) Déterminer le D. L. d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions

$$f(x) = e^x\left(1 + x^2\right); \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x}. \text{ (écrire les opérations)}$$

c) Calculer la limite suivante en utilisant les D. L. : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^x}{x}$.

Exercice 2 : (7 points)

a) La fonction suivante $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ non continue sur $[0, 2]$ est-elle intégrable sur $[0, 2]$ et pourquoi ?
b) Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{1/2}^{1} \frac{e^x}{4 + e^{-2x}} dx; \qquad \int_0^{\pi} \tan x dx.$$

c) Calculer la primitive de $f(x) = \arctan x$.

Exercice 3 : (7 points)

a) Trouver l'EDO d'ordre un que vérifie cette famille de courbes : $x = \lambda \cos t; \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$.

b) Déterminer la solution du problème $x' + \frac{1}{t}x = e^{-2t}$ pour $x(1) = 0$.
c) Donner le type de chaque EDO

$$x' = \frac{2t+1}{5x^4+1}; \qquad t^2x' + x = 0; \qquad x' + t\left(x^2 + x\right) = 0; \qquad txx' = t^2 - x^2.$$

Exercice supplémentaire : (3 points)

a) C'est quoi un D. L. d'une fonction au voisinage d'un point et il sert à quoi ?

b) Le symbole de l'intégration $\int_a^b f(x)\, dx$ symbolise quoi ?

c) Dans quel cas une solution est dite explicite ou implicite ? A quoi sert de déterminer le type d'une EDO et quels sont les deux types les plus importants ?

BONNE CHANCE et attention à la valeur propre !

Corrigé de l'examen :

Exo 1 :

1) Le D.L de $f(x)$ d'ordre n au voisinage de x_0 est :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^n + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$ 0,25

mais $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x = (\operatorname{ch} x)^{(2i+1)}$ 0,25

et $(\operatorname{ch} x)'' = (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x = (\operatorname{ch} x)^{(2i)}$

et on a $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$ 0,25 d'où :

$$\operatorname{ch} x = 1 + 0 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{(2i)!}x^{2i} + o(x^{2i})$$ 0,25 si $n = 2i$ pair

$$= 1 + 0 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{(2i)!}x^{2i} + 0 + o(x^{2i+1})$$ 0,25 si $n = 2i+1$ impair

$$= \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2i}) \quad \text{ou} \quad + o(x^{2i+1})$$
n pair $\qquad$ n impair

* $g(x) = x^3 \longrightarrow g'(x) = 3x^2 \longrightarrow g''(x) = 6x \longrightarrow g'''(x) = 6$ 0,25

et $g(1) = 1 \longrightarrow g'(1) = 3$; $g''(1) = 6$; $g'''(1) = 6$

$$\Rightarrow x^3 = 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$ 0,25

$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^3)$$ 0,25

b) $f(x) = e^x(1+x^2)$, le D.L au V_0 de e^x d'ordre 3 est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$ 0,5

$$* \; (1+x^2)$$

$$= \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$ 0,5

$$+ \qquad\qquad x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!}$$

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$$e^x(1+x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$ 0,5

* $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$ Directement la division dans l'ordre croissant

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 1+x \\ \hline -x^2 + x^3 & x^2 - x^3 \\ 0 - x^3 & \\ -x^3 - x^4 & \\ \hline x^4 & \end{array}$$

0,5

$\Rightarrow g(x) = x^2 - x^3 + o(x^3)$ 0,5

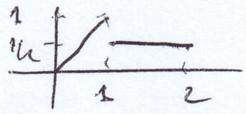
(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} = \frac{0}{0}$ (F.I) 0,5 ; on utilise le D.L d'ordre un :

$\cos x \underset{0}{\simeq} 1 + 0$ 0,25

$e^x \underset{0}{\simeq} 1 + x$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$ 0,5

Exo 1 (a) $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 1 \\ 1/2 & ; 1 \le x \le 2 \end{cases}$



f est intégrable car elle est continue sur [0,2] sauf en un seul point : 1 0,5

et elle est bornée sur [0,2]. 0,5

(b) * $\int_{1/2}^{1} \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{du}{4+u^2}$ 0,5 $= \frac{1}{4} \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{du}{1 + (\frac{u}{2})^2}$ 0,5 $= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} \Big]_{\sqrt{e}}^{e}$ 0,25

on pose $e^x = u \Rightarrow du = e^x dx$ 0,25

$x = 1 \longrightarrow u = e$

$x = \frac{1}{2} \longrightarrow u = \sqrt{e}$ 0,25

$= \frac{1}{4} \left[\operatorname{arctg} \frac{e}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{e}}{2} \right]$ 0,5

* $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 0,5 n'est pas continue en $\frac{\pi}{2}$ c.à.d continue sur $[0, \pi]$ sauf en $\frac{\pi}{2}$ 0,25

mais n'est pas bornée en $\frac{\pi}{2}$ 0,5 car $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg x = +\infty$

et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg x = -\infty$

$\Rightarrow$ tg x n'est pas intégrable sur $[0, \pi]$ 0,5

Rq : - pour (a) ils existent d'autres bonnes réponses à vérifier.

- pour tg x si l'étudiant calcule $\int_0^{\pi} tg x \, dx = -\ln|\cos x| \Big]_0^{\pi}$

$= -\ln|-1| + \ln|1|$

$= 0$

à mettre 0,75

(c) $\frac{}{1,5}$ $f(x) = \arctan x$; la primitive est $\int f(x)\,dx = \int \arctan x\,dx$

à rechercher par parties :

on pose $u = \arctan x \longrightarrow u' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 0,25

$v' = 1 \longrightarrow v = x$ 0,25

$\Rightarrow \int \arctan x\,dx = u.v - \int u'.v.\,dx$ 0,25

$= x.\arctan x - \int \dfrac{x}{1+x^2}\,dx$ 0,25

$= x.\arctan x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$ 0,25

$= x.\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

0,25 $1+x^2 > 0$ 0,25

les primitives de $f(x)$ sont :

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

0,25

Exo 3 1/7

(a) $x = \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $x'(t) = -\lambda \sin t$ 0,5

0,5 où $\lambda = \dfrac{x}{\cos t}$ 0,25 $\Rightarrow x' = -\dfrac{x}{\cos t}.\sin t = -\tan t . x$ 0,25

donc $x = \lambda \cos t$ ~~est~~ solution générale de $x' = -\tan t . x$ 0,5

(b) $x' + \dfrac{1}{t}x = e^{-2t}$, $x(1) = 0$

E.D.O linéaire avec second membre, on résout d'abord $x' + \dfrac{1}{t}x = 0$ 0,25

$\Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = -\int \dfrac{dt}{t}$ $\Rightarrow \ln|x| = -\ln|t| + C$, $C \in \mathbb{R}$ 0,25

0,25 $|x| = \dfrac{e^C}{|t|}$ $\Rightarrow x = \dfrac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

0,25 $\lambda = \pm e^C$

Par variation de la constante λ on pose :

0,25 $x = \dfrac{\lambda(t)}{t} \Rightarrow x' = \dfrac{\lambda'(t)}{t} - \dfrac{\lambda(t)}{t^2}$ 0,25

alors : $\dfrac{\lambda'}{t} - \cancel{\dfrac{\lambda}{t^2}} + \cancel{\dfrac{1}{t}\dfrac{\lambda}{t}} = e^{-2t}$ $\Rightarrow \lambda' = te^{-2t}$ 0,25

$\Rightarrow \lambda = \int te^{-2t}\,dt = -\dfrac{1}{2}te^{-2t} + \dfrac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt = -\dfrac{1}{2}te^{-2t} - \dfrac{1}{4}e^{-2t} + C$

0,25 0,25 $C \in \mathbb{R}$

(3) $u = t \rightarrow u' = 1$, $v' = e^{-2t} \rightarrow v = -\dfrac{1}{2}e^{-2t}$

0,25

La solution générale est alors :

$$x(t) = \frac{d(t)}{t} = \frac{1}{t}\left(-\frac{t}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + c\right) = -\frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4t} + \frac{c}{t}$$

0,25 0,25 $c \in \mathbb{R}$

Trouvons C par $x(1)=0$ on a : $-\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{2}e^{-2}$

0,25 0,25

La solution particulière est alors :

$$x(t) = -\frac{e^{-2t}}{2}\left(1 + \frac{1}{2t}\right) + \frac{3}{2t}e^{-2}$$ 0,5

(c) $x' = -\frac{2t+1}{5x^4+1}$ éq non linéaire à variables séparables 0,25

1,5

$t^2x' + x = 0$ éq linéaire sans second membre 0,25

$x' + t(x^2+x) = 0 \iff x' + tx = -tx^2$ éq de Bernoulli 0,25

0,25

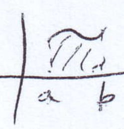
$txx' = t^2 - x^2 \iff x' = \frac{t^2-x^2}{tx} = \frac{t}{x} - \frac{x}{t} = f\left(1, \frac{x}{t}\right)$ 0,25

éq non linéaire homogène 0,25

Exo suppl : /3

a) un D.L est un polynôme qui sert à approcher une fct 0,25 au voisinage d'un point 0,25 dans certaines études comme les limites 0,25

b) $\int_a^b f(x)dx$ symbolise le calcul l'aire (surface) 0,25 formée par le graphe de $f(x)$ 0,25, l'axe des x et les droites $x=a$, $x=b$ 0,25



c) * une solution explicite x s'écrit en fct de t et la cste d'intégration λ c-à-d $x = \varphi(t,\lambda)$ 0,25 sinon elle est implicite c-à-d $\psi(x,t,\lambda)=0$ 0,25 ou $\theta(x,t)=\lambda$ 0,25

* Le type d'éq aide à choisir la méthode de résolution si possible. (à résoudre) 0,25

* les deux types : linéaires 0,25 et non linéaires 0,25

) Rq : ce qui est tracé sont les mots clés de la réponse