Devoir à distance

Ce devoir est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines
($Maths$ 4)

September 11, 2020

Exercice 1 *Quels sont les rayons de convergence des séries suivantes:*

$$\sum_{n\geq 1} n\ z^n \quad , \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \ , \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} \ .$$

Exercice 2 *Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$?*

$$f(z) = \overline{z}\ , \quad g(z) = \operatorname{Re} z\ , \quad h(z) = \operatorname{Im} z\ , \quad k(z) = |z|^2 \quad , \qquad w(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

Exercice 3 *Soit*

$$f(z) = x + ay + i(bx + cy).$$

Déterminer les constantes a, b et c telle que la fonction f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

où $z = x + iy$, $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$.
On donne

$$Q(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy - x + 3y + 5.$$

1) *Déterminer P sachant que $f(1) = 5 + 5i$.*
2) *Ecrire f en fonction de z.*

Exercice 5 *Démontrer que chacune des fonctions P suivantes est harmonique et chercher une conjuguée harmonique Q de P, c'est-à-dire, une fonction Q telle que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ soit une fonction holomorphe. Donner une forme simple pour f*

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x, \\ P(x,y) &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Exercice 6 *Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions suivantes:*

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x^2 - y^2 + x \qquad \text{sur } \mathbb{C} \\ P(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{sur } \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Exercice 7 *Déterminer le développement en série de Laurent de chacune des fonctions suivantes autour du point singulier indiqué et préciser sa nature*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2}, \qquad z = 0, \\ f(z) &= \frac{1}{z(z+1)}, \qquad z = 0. \end{aligned}$$

Exercice 8 ***1)*** *Donner les pôles ainsi que les résidus correspondant à ces pôles pour les fonctions suivantes:*

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^4}, \quad g(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}.$$

2) *Calculer l'intégrale suivante:*

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)\ \mathrm{d}z$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 3.

Exercice 9 *Soit f la fonction d'une variable complexe définie par*

$$f(z) = \frac{z-2}{3z^2+4z-4},$$

1) *Déterminer le domaine d'holomorphie de* f.

2) *Donner les points singuliers de* f *en précisant la nature de chacun d'entre eux.*

3) *Soit* $\mathcal{C}$ *le cercle défini par* $|z-i|<2$, *orienté positivement. Calculer par la méthode de votre choix l'intégrale curviligne*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Exercice 10 *Calculer les intégrales*

$$\int (6z - 4\cos z)\ \ \mathrm{d}z,$$

$$\int_0^{1+i} z\ \mathrm{d}z.$$

Exercice 11 *Calculer l'intégrale*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2}\ \mathrm{d}z$$

où $\mathcal{C}$ *est l'ellipse paramétrée par le chemin*
$\mathcal{C} = \{\gamma(t) = 3\cos t + 2i\sin t \,/\, 0 \le t \le 2\pi\}$.

Exercice 12 *Calculer les intégrales suivantes:*

$$\oint_{\mathcal{C}} z^2\ \mathrm{d}z, \qquad \oint_{\mathcal{C}} \overline{z}\ \mathrm{d}z,$$

où $\mathcal{C}$ *est le demi-cercle de centre* 0 *et de rayon* 1.

Exercice 13 *Calculer l'intégrale*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{(z-1)\,(z+3)^2}\ \mathrm{d}z$$

où $\mathcal{C}$ *est définie par*

a) $|z| = \dfrac{3}{2}$,

b) $|z| = 10$.

Exercice 14 *Utiliser la formule de Cauchy pour calculer*

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-2)(z+1)}\ \mathrm{d}z$$

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-2)^3(z+1)}\ \mathrm{d}z$$

où $\mathcal{C} = \{2 + e^{it} \diagup\ t \in [0, 2\pi]\}$