

## Examen de Rattrapage (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA. S2, 2017/2018

Jeudi le 21 Juin 2018, Durée : 1h30mn.

### Exercice 1 (10 Pts).

1) Considérons la mise à jour de rang un

$$H_1 = I + uv^T$$

où  $u, v \in \mathbb{R}^n$  et  $u \neq 0$ . Trouver les valeurs propres de  $H_1$ , puis montrer que

$$\det(H_1) = 1 + u^T v.$$

2) Soit  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Montrer en utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, que

$$\det(H_2) = (1 + u_1^T u_2) (1 + v_1^T v_2) - (u_1^T v_2) (u_2^T v_1).$$

**Théorème** (de Sherman-Morrison-Woodburg). Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  non singulière et  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Si  $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ , alors la mise à jour de rang un  $A + uv^T$  est inversible et

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

**Solution:** .

1) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $H_1$ , on a

$$(I + uv^T) x = \lambda x \iff uv^T x = (\lambda - 1)x,$$

donc  $x$  est soit parallèle à  $u \neq 0$  ou orthogonal à  $v$ . Si  $x$  est orthogonal à  $v$ , alors la valeur propre correspondante est égale à 1; sinon la valeur propre correspondante est égale à  $1 + u^T v$  4P<sup>ts</sup>. Puisque le déterminant est le produit des valeurs propres d'une matrice, alors

$$\det(H_1) = 1 + u^T v. \quad \boxed{1P^{ts}}$$

2) Soit  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

## Optimisation non linéaire

Il est facile de remarquer que

$$(I + u_1 u_2^T) \left[ I + (I + u_1 u_2^T)^{-1} v_1 v_2^T \right] = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T. \boxed{1P^{ts}}$$

En utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, on a

$$\begin{aligned} \det(I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T) &= (1 + u_1^T u_2) \left[ 1 + v_2^T (I + u_1^T u_2)^{-1} v_1^T \right], \\ &= (1 + u_1^T u_2) \left[ 1 + v_2^T \left( I - \frac{u_1 u_2^T}{1 + u_1^T u_2} \right) v_1^T \right], \\ &= (1 + u_1^T u_2) (1 + v_1^T v_2) - (u_1^T v_2) (u_2^T v_1). \boxed{4P^{ts}} \end{aligned}$$

■

**Exercice 2 (5 Pts).** Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

— Calculer les quatre premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  avec  $x_0 = (-1, 1)^T$  et  $S_0 = I$ . Que peut-on déduire ?

**Solution:**

Pour faciliter les calculs, il est possible de calculer la mise à jour de la matrice  $S_k$  par la méthode SR1 :

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \\ \frac{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)(\delta_k^2 - \gamma_k^2)}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1)\gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

— D'autre part, si  $f$  est une fonction quadratique convexe,

$$\theta(t) = f(x_k + t d_k)$$

alors

$$\theta'(t_k) = g(x_k + t d_k)^T d_k = ((x_k + t d_k)^T A + b^T) d_k = (x_k^T A + b^T) d_k + t d_k^T A d_k = g(x_k + t d_k)^T d_k$$

$$t_k \text{ est un minimum local pour } \theta \text{ sur } ]0, \infty[ \Rightarrow \theta'(t_k) = g(x_k + t d_k)^T d_k = 0 \Rightarrow t_k = \frac{-g(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k}.$$

— On a

$$g(x) = A x - b = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Examen Final

Puisque  $x_0 = (-1, 1)$  et  $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg \min \{f(x_0 + t d_0), t > 0\} = -\frac{g(x_0)^\top d_0}{d_0^\top A d_0} = \frac{5}{14}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{9}{14}\right)^T \boxed{2Pts}$$

et on

$$\delta_0 = \left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{14}\right)^T,$$

$$\gamma_0 = \left(\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}\right)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{25}{26} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)^T$$

$$d_1 = -S_1 g(x_1) = \left(\frac{9}{91}, \frac{27}{91}\right)^T$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^\top d_1}{d_1^\top A d_1} = \frac{13}{27}.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^T, \boxed{2Pts}$$

puisque  $g(x_2) = (0, 0)^T$  et  $f$  est une fonction strictement convexe alors  $x^* = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^T$  est un

minimum global stricte de plus  $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$ .  $\boxed{1Pts}$

■

## Optimisation non linéaire

**Exercice 3 (5 Pts).** Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b; \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Où  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

— Calculer les quatre premières itérations de l'algorithme DFP pour minimiser  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  avec  $x_0 = (-1, 1)^T$  et  $S_0 = I$ . Que peut-on déduire ?

**Solution:** Si  $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$  et  $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$ , alors la mise à jour DFP de la matrice  $S_k$  est calculée par

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{(\delta_k^1)^2}{\delta_k^1 \gamma_k^1 + \delta_k^2 \gamma_k^2} - \frac{(\gamma_k^1)^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} & \frac{\delta_k^1 \delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1 \gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} \\ \frac{\delta_k^1 \delta_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} - \frac{\gamma_k^1 \gamma_k^2}{(\gamma_k^1)^2 + (\gamma_k^2)^2} & \frac{(\delta_k^2 - \gamma_k^2)^2}{(\delta_k^1 - \gamma_k^1) \gamma_k^1 + (\delta_k^2 - \gamma_k^2) \gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

— D'autre part, si  $f$  est une fonction quadratique convexe,

$$\theta(t) = f(x_k + td_k)$$

alors

$$\theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = ((x_k + td_k)^T A + b^T) d_k = (x_k^T A + b^T) d_k + td_k^T A d_k = g(x_k + td_k)^T d_k$$

$$t_k \text{ est un minimum local pour } \theta \text{ sur } ]0, \infty[ \Rightarrow \theta'(t_k) = g(x_k + td_k)^T d_k = 0 \Rightarrow t_k = \frac{-g(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k}.$$

— On a

$$g(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque  $x_0 = (-1, 1)$  et  $S_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alors

$$g(x_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_0 = -S_0 g(x_0) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La fonction objective est quadratique ce qui donne

$$t_0 = \arg \min \{ f(x_0 + td_0), t > 0 \} = - \frac{g(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0} = \frac{5}{14}$$

donc

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{9}{14}\right)^T \boxed{2Pts}$$

## Examen Final

et on

$$\delta_0 = \left(\frac{5}{7}, -\frac{5}{14}\right)^T,$$
$$\gamma_0 = \left(\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}\right)^T,$$

alors

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{27}{70} & \frac{11}{70} \\ \frac{11}{70} & \frac{34}{35} \end{pmatrix}$$

aussi

$$g(x_1) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)^T$$
$$d_1 = -S_1 g(x_1) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)^T$$

et

$$t_1 = -\frac{g(x_1)^\top d_1}{d_1^\top A d_1} = \frac{10}{21}.$$

En suite, on a

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^T, \boxed{2Pts}$$

puisque  $g(x_2) = (0, 0)^T$  et  $f$  est une fonction strictement convexe alors  $x^* = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)^T$  est un

minimum global stricte de plus  $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}. \boxed{1Pts}$

■