Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté des Sciences
Département mathématiques et informatiques
Année 2019-2020

Evaluation en algèbre du 2ème semestre

Parmi les 20 questions vous répondez sur 10. Vous avez (0.5 pts) sur la confirmation ou l'infirmation par Oui ou Non et (1 pt) sur le justificatif de chaque réponse

I. Questions sur les espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel.

1. Si un sous-ensemble de E contient la somme d'une famille finie quelconque de ses éléments, alors c'est un espace vectoriel.

2. Si un sous-ensemble de E est un espace vectoriel, alors il contient l'opposé de tout vecteur de E.

3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est toujours un sous-espace vectoriel de E.

4. Si un sous-ensemble de E contient tous les plans vectoriels engendrés par deux quelconques de ses vecteurs, alors c'est un sous-espace vectoriel de E.

5. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est toujours un sous-espace vectoriel de E. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

6. Dans quel cas l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x^2+y^2 = \alpha\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7. La famille des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ est une famille génératrice.

8. La famille des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 0, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 0)\}$ est une famille libre.

9. Toute famille libre de 4 vecteurs forme une base.

10. Si on ajoute un vecteur quelconque à une base, on obtient une famille génératrice.

11. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x + y = 1\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies?

    a. E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

b. E n'est pas un sous espace vectoriel, car $(0,0) \notin E$.

c. E n'est pas un sous espace vectoriel, car $(1,0) \in E$, mais $(-1,0) \notin E$.

d. E n'est pas un sous espace vectoriel, car $(1,0) \in E$ et $(0,1) \in E$, mais $(1,1) \notin E$.

12. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x+y-z=0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies?

    a. $(0,0,0) \in E$

    b. E n'est pas stable par addition.

    c. E est stable par multiplication par un scalaire.

    d. E est un sous espace vectoriel.

13. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus xy+xz+y=0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies?

    a. $(0,0,0) \in E$

    b. E n'est pas stable par addition.

    c. E est stable par multiplication par un scalaire.

    d. E est un sous espace vectoriel.

14. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ (x+y)(x+z)=0\}$, muni des opérations usuelles. Quelles sont les assertions vraies

    a. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x+y=x+z=0\}$.

    b. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x+y=0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x+z=0\}$.

    c. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x+y=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \ x+z=0\}$.

    d. E n'est pas un sous espace vectoriel, car E n'est pas stable par addition.

15. Soit E un espace vectoriel. Quelles sont les assertions vraies?

    a. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E peut être vide.

    b. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F contient toute combinaison linéaire d'éléments de E.

    c. Il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient un seul élément.

    d. Si F est un sous-ensemble non vide de E qui contient toute combinaison linéaire de deux vecteurs de F, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

II. Questions sur les applications linéaires

1. On considère les deux applications suivantes : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (y, x)$. Quelles sont les assertions vraies?

   a. $f(0) = 0$.

   b. f est une application linéaire.

   c. $g(x, y) = g(y, x)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   d. g est une application linéaire.

2. Est ce que la somme de deux applications linéaires est une application linéaire?

3. Est ce que le produit de deux applications linéaires est une application linéaire?

4. On considère l'application : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, \lambda xy)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ g(x, y) = \left(y, x^\lambda\right)$. Pour quelles valeurs de λ, f et g soient des applications linéaires.

5. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{cc} f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, & g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X] \\ P \to f(P) = P(0) + P'(0), & P \to g(P) = P(0) + P', \end{array}$$

   où P' est la dérivée première de P. Quelles sont les assertions vraies?

   a. $f(0) = 1$

   b. f est une application linéaire.

   c. $g(0) = 1$

   d. g est une application linéaire.

Chargé de cours: Pr. A. Djebabla