Série n°2

Corrigé.

Exercice 03

1) Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \to F$ un opérateur linéaire continu tel que :

$$\exists c > 0 : \quad \|Tx\| \geq c\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

a) Montrons que l'image de T, $R(T)$ est fermée.

Soit $(y_n) \subset R(T)$ telle que $y_n \longrightarrow y \in F$, montrons que $y \in R(T)$. En effet :

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(T)$ donc $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$: tq $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \geq c\|x_n - x_m\| \qquad (1).$$

Comme (y_n) converge dans F, alors (y_n) est une suite de Cauchy i.e., $\|y_n - y_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après (1).

D'où (x_n) est une suite de Cauchy dans E complet, alors $(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in E$.

On a : $\qquad Tx_n = y_n \qquad (2)$

Par passage à la limite dans (2), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to+\infty} x_n) = Tx, \quad \text{car } T \text{ est continu sur } E.$$

D'où $y = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} Tx_n = Tx$,

$$y = Tx \Rightarrow y \in R(T).$$

Alors $R(T)$ est fermée.

b)

b) Montrons que T est inversible de E dans $R(T)$.

En effet.

$Tx = 0 \Leftrightarrow 0 = \|Tx\| \geq c\|x\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

~~d~~ T est injectif.

Alors T est bijectif de E dans $R(T)$, ~~donc~~ T admet un inverse noté $T^{-1} : R(T) \to E$ et on a pour $x = T^{-1}y$

$$\|T.T^{-1}y\| \geq c\,\|T^{-1}y\| \quad , \forall y \in R(T)$$

d'où $\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$ i.e $T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), E)$

c) On suppose que $R(T)$ est dense i.e,

$$\overline{R(T)} = F \xRightarrow{R(T) \text{ est fermé}} R(T) = \overline{R(T)} = F$$

Donc $\begin{cases} T \in \mathcal{L}(E, F) \\ T \text{ est bijectif de } E \text{ ds } F \end{cases} \Rightarrow$ T est inversible de E ds F

i.e., T est un isomorphisme.

<u>Exercice 4</u>

Soit E un espace vectoriel et E^* son dual algèbrique de E

1) Montrons que $H \subset E$ est un hyperplan $\Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* : H = \ker \varphi$

$\Leftarrow$) Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, posons $H = \ker \varphi$

Comme $\varphi \neq 0$, $\exists\, a \in E$ et $a \neq 0$ tq $\varphi(a) \neq 0$

Montrons que $E = H \oplus vect(a)$ i.e., H est un hyperplan.

En effet

Soit $x \in E$ et considérons $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} . a$

$$\varphi(y) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} . a\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} . \varphi(a) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \ker \varphi \Rightarrow x = y + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}}_{\in K \text{ corps des scalair}} . a \in \ker \varphi + vect(a) = H + vect(a)$$

D'où $E = H + vect(a)$.

- Il reste à montrer que $E = H \oplus vect(a)$. Pour cela il suffit de montrer que la décomposition est unique.

Soit $x = y_1 + \lambda_1 a$ avec $y_1, y_2 \in H = \ker \varphi$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$= y_2 + \lambda_2 a$

On a $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(y_1)}_{=0} + \lambda_1 \varphi(a) = \underbrace{\varphi(y_2)}_{=0} + \lambda_2 \varphi(a)$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi(a) = 0 \xRightarrow{\varphi(a) \neq 0} \boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

Donc, on a $x = y_1 + \lambda_1 a = y_2 + \lambda_1 a \Rightarrow \boxed{y_1 = y_2}$

Alors la décomposition est unique

$\Rightarrow$) Soit H un hyperplan de E i.e., $E = H \oplus vect(a)$

c.a.d chaque élt $x \in E$ s'écrit de manière unique

$x = y + \lambda a$ où $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Définissons l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ par.

~~Pour~~

$\varphi(x) = \lambda$ pour $x = y + \lambda a \in E$

Vérifions que $\varphi \in E^*$.

φ est linéaire : ~~$\varphi(x$~~

Pour $x' = y' + \lambda' a \in E$ $\varphi(x + x') = \varphi(y + y' + (\lambda + \lambda')a)$

$= \lambda + \lambda' = \varphi(x) + \varphi(x')$

$\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha y + \alpha\lambda a) = \alpha\lambda := \alpha\varphi(x)$.

Vérifions que $H = \ker \varphi$ Sol

$x \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y + \lambda a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow x = y \in H$

C.Q.F.D

4) Montrons que $\ker \varphi$ est fermé $\Leftrightarrow$ φ est continu

$\Leftarrow$) Soit φ continue. $\ker\varphi = \{x \in E : \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$

$\{0\}$ étant fermé, φ continue $\Rightarrow \varphi^{-1}(\{0\}) = \ker\varphi$ est fermé

$\Rightarrow$) Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ et supposons que $H = \ker\varphi$ est fermé ds E

Soit $a \in E$ tq $\varphi(a) = 1$ (un tel élt a existe puisque il existe $b \in E$ tq $\varphi(b) \neq 0$ car $\varphi \neq 0$, on prend $a = \frac{1}{\varphi(b)} b$, $\varphi(a) = \frac{1}{\varphi(b)} \varphi(b) = 1$)

- Notre but à présent est demontrer : $\exists \rho > 0$: $\forall x \in B(0,\rho)$: $|\varphi(x)| \leq 1$

En effet

H étant fermé, il en est de même du translaté

$a + H = \{a + x : x \in H\}$

car l'application $g : H \longrightarrow a + H$

$x \longmapsto g(x) = a + x.$

est un homéomorphisme qui transforme H en $a + H$ i.e.,

$g(H) = a + H$, H fermé $\xRightarrow{g \text{ homéomorphisme}}$ $g(H) = a + H$ fermé.

Donc $E \setminus a + H$ est un ouvert contenant l'origine 0

{puisque $0 \notin a + H$ sinon $0 = a + x_H \Rightarrow x = -a \in H \Rightarrow a \in H$ car H est un s.e.v. et ceci est une contradiction}

Alors $\exists \rho > 0$: $0 \in B(0,\rho) \subset E \setminus a + H \Rightarrow B(0,\rho) \cap a + H = \emptyset$

vérifions que pour tout $x \in B(0,\rho)$, $\varphi(x) \neq 1$

En effet sinon $\varphi(x) = \varphi(a) = 1 \Rightarrow \varphi(x - a) = 0 \Rightarrow x - a \in H = \ker\varphi$

$\Rightarrow x \in a + H$ contradiction car $x \in B(0,\rho)$ et $B(0,\rho) \cap a + H = \emptyset$

Vérifions à présent que

si $x \in B(0,\rho)$ $\quad |\varphi(x)| \leq 1$.

Supposons le contraire : $\exists\, y \in B(0,\rho)$: $\varphi(y) = \alpha$ avec $|\alpha| > 1$.

On a : $\left\| \frac{y}{\alpha} \right\| = \frac{1}{|\alpha|} \|y\| < \frac{\rho}{|\alpha|} < \rho$, d'où $\frac{y}{\alpha} \in B(0,1)$.

D'autre part $\varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\varphi(y) = \frac{\varphi(y)}{\varphi(y)} = 1$,

ce qui est impossible, on a donc bien $|\varphi(y)| \leq 1$ et donc

Pour tout $x \in B(0,\rho)$, $\quad |\varphi(x)| \leq 1$.

En suite soit $z \neq 0$, quelconque ds E :

$\rho \frac{z}{\|z\|} \in B(0,\rho)$, d'où $\left|\varphi\left(\frac{\rho z}{\|z\|}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow |\varphi(z)| \leq \frac{1}{\rho}\|z\|$

Alors φ est continue.

3. Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$

$\varphi \in E^*$: $\quad \varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad f \longmapsto \varphi(f) = f(0)$

Montrons que φ n'est pas continue en utilisant la suite

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n(1-nt), & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\|f_n\| = 1$, $\varphi(f_n) = 2n$. Donc $\frac{\|\varphi(f_n)\|}{\|f_n\|} = 2$ n'est pas borné donc φ n'est pas continue

On a $\operatorname{Ker}\varphi = \{ f \in E : \varphi(f) = 0 \} = \{ f \in E : f(0) = 0 \}$

Comme φ n'est pas continue $\Rightarrow$ $H = \operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas fermé

Exercice 5

1) A partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt\right|^2 dx.$$

$$\leq \int_0^1 \left[\int_0^x |x-t|^2\,dt \int_0^x |f(t)|^2\,dt\right] dx$$

$$\leq \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\int_0^x |f(t)|^2\,dt\right] dx \leq \frac{1}{3}\|f\|^2.$$

Donc $\|Tf\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|$ i.e. $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$.

2) Par récurrence, on a pour $n=1$, la propriété est satisfaite.
Supposons que la formule est vraie jusqu'au rang n

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt,$$

et montrons qu'elle est satisfaite pour le rang $n+1$. On a :

$$(T^{n+1}f)(x) = T.(T^n f)(x) = \int_0^x (x-t)\,(T^n f)(t)\,dt$$

$$= \int_0^x (x-t)\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s)\,ds\right] dt$$

$$= \int_0^x f(s)\left[\int_s^x (x-t)\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dt\right] ds$$

$$= \int_0^x \frac{1}{(2n-1)!}\left[f(s)\int_s^x \underbrace{(x-t)(t-s)^{2n-1}}\,dt\right] ds$$

intégration par partie on trouve (*)

$$= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^x \underbrace{\frac{(x-s)^{2n+1}}{2n(2n+1)}}_{(*)} f(s)\,ds = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t)\,dt$$

2) L'equation $f(x)=g(x)+\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt$ s'ecrit

$$f(x)=g(x)+T f(x), \text{ ou encore}$$

$$(I - T)\,f(x) = g(x).$$

Comme $\|T\|<1$ alors $(I-T)$ est inversible de plus $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. D'où

$$(I-T)\,f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)=(I-T)^{-1}g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} T^n g(x)$$

$$= T^0 g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n g(x)$$

$$= I\,g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt \quad \text{d'après la question 1}$$

$$= g(x) + \sum_{n\geq 1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)\,dt.$$

La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge uniformément sur $[0, x]$,

on obtient finalement

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} g(t)\,dt.$$

$$= g(x) + \int_0^x sh(x-t)\,g(t)\,dt.$$

Série n° 2

Exercice 06

1) Montrons que le graphe de T, G(T) est fermé dans $E \times F$. En effet

soit $(f_n, Tf_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G(T)$ telle que (f_n, Tf_n) converge vers

$(f, g) \in E \times F$, montrons que $(f, g) \in G(T)$.

$$(f_n, Tf_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (f, g) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} f_n = f & \text{i.e., } \|f_n - f\|_\infty \to 0 \\ \lim_{n \to +\infty} Tf_n = f'_n = g & \text{i.e., } \|f'_n - g\|_\infty \to 0 \end{cases}$$

Comme les deux convergences sont uniformes, ceci implique que $g = f'$ et donc $(f, g) = (f, f') = (f, Tf) \in G(T)$

2) On utilise la suite $f(x) = x^n$, on a

$\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f'_n\|_\infty = n$.

On a $\frac{\|Tf_n\|_\infty}{\|T_n\|_\infty} = \frac{\|f'_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n}{1} = n$ n'est pas borné

Donc T n'est pas continue

3) Le graphe de T est fermé et T n'est pas continue. Le théorème du graphe fermé est donc en défaut. Puisque, on sait déjà que F est complet pour la norme $\|.\|_\infty$, on conclut que E n'est pas complet pour cette norme

Exercice 07

D'après la définition de T_k, on a $T_k x \to 0$ pour tout $x \in E$

ce qui montre que l'ensemble $\|T_k x\|$ est borné

2) On a $\|T_k\| \leq k$. D'autre part soit $e_k = (0, \ldots, \underset{k^{ème} \text{ position}}{1}, 0 \ldots 0)$

$\|e_k\| = 1$ et $\|T_k e_k\| = k$ donc $\|T_k\| = k$

ce qui montre que l'ensemble $\{T_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas borné

Conclusion E n'est pas un espace de Banach