Série 2

Exercice 1

1. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que l'opérateur $T : E \to E$ défini par
$$Tf = \int_0^x f(t)dt$$
appartient à l'espace $\mathcal{L}(E)$, puis calculer sa norme.
2. Soient $E = C([0,1], \mathbb{C})$ et p un élément de E. On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}$
$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)p(x)dx.$$
Montrer que $\varphi \in E'$ et calculer sa norme dans le cas où E est muni de la norme $\| \, . \, \|_2$ puis $\| \, . \, \|_\infty$.
3. Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_n \mid x_n \mid$.
On considère l'application $T : \ell^\infty(\mathbb{N}^*) \to \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ définie par
$$T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2/n, x_3/3, ..., x_n/n, ...).$$
Montrer que T est un opérateur linéaire borné et calculer sa norme.

Exercice 2 Soient $E = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ muni de la norme $\| \, x \, \|_2 = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2)^{1/2}$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$ avec $M = \sup_n \mid \lambda_n \mid$.
Soit $T : E \to E$ définie par $Tx = y$ avec $y = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$ si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in E$.

1. Montrer que T un opérateur linéaire, continu et calculer sa norme.
2. Montrer que si l'ensemble $\{|\lambda_n|, n \geq 1\}$ est minoré par un nombre strictement positif, alors T est bijectif. Préciser dans ce cas T^{-1} et déterminer sa norme.
3. On suppose que l'un des λ_n est nul. Montrer que T n'est ni injectif ni surjectif.

Exercice 3 Soient E et F deux espaces vectoriels normé.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que toute application linéaire définie de E dans F est continue.
2. Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu, On suppose qu'il existe une constante strictement positive c telle que
$$\| \, Tx \, \| \geq c \, \| \, x \, \|, \; \forall x \in E.$$
   (a) Montrer que l'image de T, $\mathcal{R}(T)$ est fermée.
   (b) Montrer que T est inversible de E dans $\mathcal{R}(T)$.
   (c) On suppose que $\mathcal{R}(T)$ est dense dans F. En déduire que T est un isomorphisme.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel et E^* son dual algébrique.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = ker\varphi$.
2. Soit φ un élément de E^*. Montrer que $H = ker\varphi$ est fermé si et seulement si φ est continue.

1. F. Zouyed, email :fzouyed@gmail.com, Laboratoire des Mathématiques appliquées $\mathcal{LMA}$

3. Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|f\| = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt$. Montrer que la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = f(0)$ n'est pas continue. Indication : utiliser la suite

$$f_n = \begin{cases} 2n(1-nt), & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

-Que peut-on déduire pour le sous-espaces des éléments de E nuls à l'origine.

Exercice 5 Soit $E = L^2[0,1]$ et $T : E \to E$ l'application définie par

$$Tf(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

1. Montrer que $\| T \|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ et que pour $n \geq 1$

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)dt.$$

2. Résoudre l'équation intégrale, avec $g \in E$ donnée $f \in E$ l'inconnue

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

Exercice 6 Soit $E = C^1([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, continuement dérivables et $F = C([0,1])$ tous deux munis de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $T : E \to F$ défini par $\forall f \in E,\ Tf = f'$.

1. Montrer que le graphe de T, $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Montrer que T n'est pas continu.
3. Expliquer le résultat.

Exercice 7 Soient $E = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N});\ x_n = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } n\}$ et $F = \ell^2(\mathbb{N})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'opérateur $T_k : E \to F$ par

$$T_k((x_n))_n = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n \\ kx_k, & \text{si } k = n. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|T_k x\|$ est borné.
2. Montrer que $\| T_k \|_{\mathscr{L}(E,F)} = k$.
3. Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas dans ce cas.