

chapitre3:Champs de tenseurs.

Zoubida Souici-Benhammadi
Master1 systèmes dynamiques, UBMA

August 6, 2020

Plan:

§1:Produit tensoriel, Puissance tensorielle, Puissance extérieure, Produit extérieur.

§2:Fibré tangent, fibré cotangent et fibré $T_q^p M$.

§3:Champs de Tenseurs

§4:Formes différentielles.

1 Produit tensoriel, Puissance tensorielle, Puissance extérieure, Produit extérieur.

1.1 Produit tensoriel

Soit $\{V_j\}_{j=1,\dots,n}$ une suite finie d'espaces vectoriels de dimensions finies.

Definition 1 On appelle produit tensoriel des espaces de cette suite l'ensemble

$$\bigotimes_{j=1}^n V_j = L_{\mathbb{R}}^n(\bigotimes_{j=1}^n V_j^*, \mathbb{R})$$

Theorem 2 $\bigotimes_{j=1}^n V_j$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\dim \bigotimes_{j=1}^n V_j = \prod_{j=1}^n \dim_{\mathbb{R}} V_j$

Definition 3 Si $\alpha \in \bigotimes_{j=1}^m V_j$ et $\beta \in \bigotimes_{j=1}^n V_j$ avec $1 < m < n$

alors on définit $\alpha \otimes \beta \in \bigotimes_{j=1}^n V_j$ par:

$$\alpha \otimes \beta(x_1^*, \dots, x_n^*) = \alpha(x_1^*, \dots, x_m^*) \cdot \beta(x_{m+1}^*, \dots, x_n^*); \forall (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \bigotimes_{j=1}^n V_j^*$$

Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \pi V_j = \pi V_j^{**}$ on définit $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in \bigotimes_{j=1}^n V_j$ de la même façon.

Cas des applications linéaires:

Soit $f_j \in \text{Hom}(V_j, W_j)$ une suite d'applications linéaires où $j = 1, \dots, n$ et où $\{W_j\}_{j=1, \dots, n}$ est une suite de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finis.

On définit le produit tensoriel $\bigotimes_{j=1}^n f_j \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigotimes_{j=1}^n V_j, \bigotimes_{j=1}^n W_j)$ par:

$$\bigotimes_{j=1}^n f_j(\alpha) = \alpha \circ \left(\bigotimes_{j=1}^n {}^t f_j \right)$$

où ${}^t f_j \in \text{Hom}(W_j^*, V_j^*)$

Le produit tensoriel des applications linéaires satisfait à:

$$\left(\bigotimes_{j=1}^n g_j \right) \circ \left(\bigotimes_{j=1}^n f_j \right) = \bigotimes_{j=1}^n (g_j \circ f_j)$$

1.2 Puissance tensorielle:

Si les V_j sont n exemplaires d'un même espace vectoriel, le produit tensoriel $\bigotimes_{j=1}^n V_j$ est noté $\bigotimes^n V$ et est appelé puissance tensorielle $n^{\text{ième}}$ de V

On aura donc $\bigotimes^1 V = V$
et on pose $\bigotimes^0 V = \mathbb{R}$

Theorem 4 Soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une base de V

Alors $x_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes x_{\tau(n)}$ décrit une base de $\bigotimes^n V$ lorsque τ parcourt l'ensemble des applications de l'intervalle entier $[1, n]$ dans $[1, k]$.

1.3 Puissance extérieure:

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\dim V = k$

$n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par S_n le groupe des permutations de l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$

$\forall \sigma \in S_n$ on note $sign(\sigma) = (-1)^+$ sa signature

pour $\beta \in \otimes^n V$ et $\sigma \in S_n$, on définit $\sigma\beta \in \otimes^n V$ par:

$$\sigma\beta(x_1^*, \dots, x_n^*) = \beta(x_{\sigma(1)}^*, \dots, x_{\sigma(n)}^*); \quad \forall (x_1^*, \dots, x_n^*) \in (V^*)^n$$

On pose

$$\wedge^n V = \{\beta \in \otimes^n V : \sigma\beta = sign(\sigma)\beta\}$$

Definition 5 $\wedge^n V$ est appelé puissance extérieure $n^{ième}$ de V

Theorem 6 $\wedge^n V$ est un sous espace vectoriel de $\otimes^n V$

1.4 Produit extérieur:

Definition 7 L'endomorphisme A de $\otimes^n V$ défini par:

$$A\beta = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot \sigma\beta; \quad \forall \beta \in \otimes^n V \text{ est appelé alternation sur } \otimes^n V$$

Definition 8 Le produit extérieur de $\alpha \in \wedge^n V$ et $\beta \in \wedge^m V$ est $\alpha \wedge \beta = A(\alpha \otimes \beta)$

Propriétés:

1) L'application $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$ est bilinéaire.

2) Si $\alpha \in \wedge^n V$ et $\beta \in \wedge^m V$ alors $\beta \wedge \alpha = (-1)^{mn} \alpha \wedge \beta$

3) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

2 Fibré tangent, fibré cotangent et fibré $T_q^p M$:

2.1 Fibré tangent

Soit M une variété différentielle de classe C^p et de dimension k

Soit $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ le fibré tangent de M où $\pi : TM \rightarrow M$ est la projection canonique ou application pied (voir chapitre 2) définie par :

$$\pi(\xi) = x \Leftrightarrow \xi \in T_x M$$

et où $T_x M$ est l'espace tangent à M en x

2.2 Fibré cotangent:

Definition 9 On appelle fibré cotangent de M l'ensemble noté $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M$

où $T_x^* M$ est le dual de l'espace tangent $T_x M$ et où $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique définie par :

$$\pi^*(\alpha) = x \Leftrightarrow \alpha \in T_x^* M$$

2.3 Fibré $T_q^p M$:

On définit $T_q^p M$ par $T_q^p M = \bigotimes^p TM \otimes^q T^*M = \bigcup_{x \in M} \bigotimes^p T_x M \otimes^q T_x^* M$ et sa projection canonique est l'application $\pi_q^p : T_q^p M \rightarrow M$ définie par :

$$\pi_q^p(\delta) = x \Leftrightarrow \delta \in \bigotimes^p T_x M \otimes^q T_x^* M$$

3 Champ de Tenseurs

Definition 10 Soit M une variété différentielle de classe C^∞ et de dimension n

On appelle champ de tenseurs de type (p, q) (ou p fois contravariant et q fois covariant) sur M , une section T du fibré

$$T_q^p M = \bigotimes^p TM \otimes^q T^*M = \bigcup_{x \in M} \bigotimes^p T_x M \otimes^q T_x^* M \quad (\text{c'est à dire } \pi_q^p \circ T = Id_M)$$

Proposition 11 *Un champ de tenseurs de type (p, q) défini sur un ouvert U d'une carte $C = (U, \varphi)$ en un point x s'exprime par:*

$$T(x) = \sum T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_q}$$

Où $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ sont des fonctions sur U dites composantes de T relativement au système de coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$

On rappelle que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1, \dots, n}$ est la base de $T_x M$ et que $(dx_j)_{j=1, \dots, n}$ est la base duale de $T_x^* M$

Exemples:

- 1) Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs de type $(1, 0)$
- 2) Une métrique Riemannienne g est un champ de tenseur de type $(0, 2)$ donné par $g = g_{ij} dx_i \otimes dx_j$

- 3) un bivecteur de Poisson Λ est un champ de tenseur de type $(2, 0)$ donné par $\Lambda = \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$

Remark 12 *On va définir par la suite les formes différentielles de degré r qui sont des champ de tenseurs de type $(0, r)$ qui vérifie: $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \omega(X_1, \dots, X_r)$ et où $\sigma \in S_n$*

4 Formes différentielles:

Soit M une variété différentielle de classe C^∞ paracompacte et de dimension n

4.1 Puissance extérieure $n^{ième}$ du fibré cotangent:

Definition 13 Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle puissance extérieure $n^{ième}$ du fibré cotangent T^*M l'ensemble $\overset{n}{\wedge} T^*M = \bigcup_{x \in M} \overset{n}{\wedge} T_x^*M$

Definition 14 Soit $p : \overset{s}{\wedge} T^*M \rightarrow M$ définie par $p(\alpha) = x$

On appelle section du fibré $\overset{s}{\wedge} T^*M$, une application $\omega : M \rightarrow \overset{s}{\wedge} T^*M$ telle que $p \circ \omega = Id_M$

Definition 15 Une forme différentielle de degré s ($s \leq n$) est une section de classe C^∞ du fibré $\overset{s}{\wedge} T^*M$

Notation 16 On note l'ensemble de toutes les formes différentielles de degré s sur M par $\Omega^s(M)$ ou bien par $C^\infty \overset{s}{\wedge} T^*M$

Remark 17 $(\Omega^s(M), +, \cdot)$ est un module sur l'anneau des fonctions différentiables $\Omega^0(M)$.

où pour $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^s(M)$; $(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$
 et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\omega)(x) = \lambda.\omega(x)$
 $(\varphi\omega)(x) = \varphi(x).\omega(x)$ avec φ fct différentiable d'un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Produit extérieur de deux formes différentielles:

Soit $\omega \in \Omega^s(M)$ et $\eta \in \Omega^r(M)$ on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{s+r}(M)$ par:

$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$$

Propriétés:

Si $\omega \in \Omega^s(M)$; $\eta \in \Omega^r(M)$ et $\theta \in \Omega^k(M)$ alors on a:

- 1) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \omega \wedge \eta \wedge \theta$
- 2) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$ où $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^s(M)$
- 3) $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$

Theorem 18 Chaque forme differentielle de degré s sur M est définie par:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_s}$$

Differentielle exterieure d'une forme differentielle:

Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$ ($p \in \mathbb{N}, p \leq n$)

On associe à α l'application $d\alpha : (\chi(M))^p \rightarrow C^\infty(M)$ définie par:

$$d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\sigma \in S_{p+1}} \text{sign}(\sigma) X_{\sigma(1)} \langle \alpha \mid X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p+1)} \rangle - \frac{p}{2(p+1)!} \sum_{\sigma \in S_{p+1}} \text{sign}(\sigma) \langle \alpha \mid [X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}], X_{\sigma(3)}, \dots, X_{\sigma(p+1)} \rangle$$

Proposition 19 $\forall \alpha \in \Omega^p(M)$ on a :

$$d\alpha(X_1, \dots, X_{p+1}) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \langle \alpha \mid X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1} \rangle + \frac{1}{p+1} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle \alpha \mid [X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1} \rangle$$

où $\widehat{X}_i$ signifie que l'on supprime X_i dans la suite $(X_k)_{k=1, \dots, p+1}$
et où $\langle \alpha \mid X_1, \dots, X_{p+1} \rangle$ désigne la fonction de classe C^∞ de M dans $\mathbb{R}$
définie par:
 $\langle \alpha \mid X_1, \dots, X_{p+1} \rangle(x) = (\alpha(x))(X_1(x), \dots, X_{p+1}(x)) \quad \forall x \in M$

Remark 20 $C^\infty T_p^0 M$ s'identifie à $L^p((\chi(M))^p, C^\infty(M))$ par un isomorphisme $\Phi : C^\infty T_p^0 M \rightarrow L^p((\chi(M))^p, C^\infty(M))$ définie par:

$$\Phi(T)(X_1, \dots, X_p) = \langle T \mid X_1, \dots, X_p \rangle$$

où $T \in C^\infty T_p^0 M$

Théorème et définition:

$\forall \alpha \in \Omega^p(M)$, $d\alpha$ est une forme differentielle de degré $p+1$ sur M , on l'appelle la differentielle exterieure de α

Si $\alpha \in \Omega^p(M)$ et si $C = (U, \varphi)$ est une carte de M alors on a le théorème:

Theorem 21 $d\alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

où on rappelle que

$$\alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \text{ avec } \alpha_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(U)$$

Propriétés:

$$1) d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

$$\alpha \rightarrow d\alpha$$

est une application $\mathbb{R}$ -linéaire.

$$2) d(f.\alpha) = f.d\alpha + df \wedge \alpha; \forall \alpha \in \Omega^p(M) \text{ et } \forall f \in C^\infty(U)$$

$$3) \forall \alpha \in \Omega^p(M) \text{ et } \forall \beta \in \Omega^q(M) \text{ on a:}$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

$$4) \forall \alpha \in \Omega^p(M), d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$$

Definition 22 $\alpha \in \Omega^p(M)$ est dite forme fermée si $d\alpha = 0$

$\alpha \in \Omega^p(M)$ est dite exacte s'il existe $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$ telle que $\alpha = d\beta$

Definition 23 On appelle $p^{\text{ième}}$ espace de cohomologie de la variété M , l'espace vectoriel quotient $H^p(M) = F^p(M)/E^p(M)$

où $F^p(M)$ et $E^p(M)$ sont respectivement les ensembles des formes différentielles fermées de degré p et des formes différentielles exactes de degré p .

Image réciproque:

Soient M, M' deux variétés paracompactes de classe C^∞ et de dimension n et soit $f \in \text{Diff}^\infty(M, M')$

Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$, l'élément $f^*\alpha \in \Omega^p(M')$ est définie par:

$$\langle f^*\alpha \mid X_1, \dots, X_p \rangle = \langle \alpha \mid f_*X_1, \dots, f_*X_p \rangle \circ f$$

où $f_*X_i = Tf \circ X_i \circ f^{-1}$ est l'image réciproque de X_i par f et où $i = 1, \dots, n$

Proposition 24 $f^* : \Omega^p(M') \rightarrow \Omega^p(M)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels vérifiant:

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Theorem 25 $\forall \beta \in \Omega^p(M')$ on a $df^*\beta = f^*d\beta$