Chapitre1:Variétés differentielles

Zoubida Souici-Benhammadi
Master1 systèmes dynamiques, UBMA

July 3, 2020

-Prérequis:
Topologie, calcul differentiel, algèbre linéaire.

-Plan:

1 Cartes, Atlas, Variétés.

Une carte dans un ensemble E est un triple $C = (U, \varphi, n)$ où:
U est un sous ensemble de E
$n \in \mathbb{N}$ appelé dimension de la carte
φ une bijection de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Example 1

1)$C = (\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ est une carte de $\mathbb{R}^n$
2)Soit $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

On définit par les projections stéréographiques une carte $C = (U, \varphi)$ de S_1comme suit:

$U = S_1 \setminus \{N\}$ où $N = (0, 1)$ et $\varphi(P)$ est la projection du point $S = (0, -1)$ en passant par un point $P = (x, y)$de l'ouvert U sur la tangente à S_1 au point N c'est la droite $y = +1$

C est un exemple de carte de dimension 1 sur l'ensemble S_1où $\varphi(x, y) = \frac{x}{1-y}$

Definition 2

Deux cartes de même dimension n sur un ensemble E notées $C = (U, \varphi)$ et $C' = (U', \varphi')$ sont dites C^p-compatibles si:

Les ensembles $\varphi(U \cap U')$ et $\varphi'(U \cap U')$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et si l'application $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ est un difféomorphisme de classe C^p

Example 3

Soit $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Soient les cartes $C = (U, \varphi)$ définie par $U = S_1 \setminus \{N\}$ où $N = (0, 1)$ et $\varphi(x, y) = \frac{x}{1-y}$

et $C' = (U^{'}, \varphi')$ définie par $U' = S_1 \setminus \{S\}$ où $S = (0, -1)$ et $\varphi'(x, y) = \frac{x}{1+y}$ où φ' désigne la projection du point $N = (0, 1)$ en passant par un point (x, y)de l'ouvert U 'sur la tangente à S_1 au point S

Les deux cartes C et C' sont C^p -compatibles

Les fonctions réciproques de φ et φ' étant:

$\varphi^{-1}(z) = (\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2})$ et $\varphi'^{\ -1}(z) = (\frac{2z}{1+z^2}, \frac{z^2-1}{1+z^2})$

Definition 4

on appelle un C^p -atlas ou atlas de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$ ou$p = \infty$)d'un ensemble E , un ensemble de cartes noté $(A) = \{C_k = (U_k, \varphi_k)\}_{k \in K}$ de cartes sur E tels que:

1) $\underset{k \in K}{\cup} U_k = E$

2)$\forall (k, j) \in K \times K$, les cartes C_k et C_j sont C^p -compatibles

L'ensemble $(A) = \{C, C'\}$ donné par les cartes C, C'de l'exemple précédent est un C^p -atlas

Definition 5

On dit que deux C^p -atlas (A) et (B)sont compatibles (on note $(A) \sim (B)$) si $(A) \cup (B)$ est un C^p -atlas

Remark 6

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence

Definition 7

On appelle topologie définie par un atlas (A) sur l'ensemble E et on la note $\tau_{(A)}$ l'unique topologie pour laquelle le domaine U d'une carte quelconque de (A) est un ouvert et la bijection φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$

les ouverts de cette topologie sont les ensembles $O \subset E$ tels que , $\forall c = (U, \varphi) \in (A)$, $\varphi(O \cap U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Proposition 8

Si $(A) \sim (B)$ alors $\tau_{(A)} = \tau_{(B)}$

Definition 9

Soit $\widehat{(A)}$ la classe d'équivalence d'un C^p -atlas (A) , alors $\widehat{(A)}$ définit une topologie sur E qu'on appelle topologie canoniquement associé à $\widehat{(A)}$

Definition 10

Un C^p-atlas (A) de E est dit saturé si pour tout C^p-atlas (B) tel que $(A) \sim (B)$ on a $(B) \subset (A)$

Definition 11

On appelle variété differentielle de classe C^p,un ensemble M muni d'une classe d'équivalence de C^p-atlas telle que la topologie qui lui est canoniquement associée soit séparée.

S_1muni de l'atlas $(A) = \{C, C'\}$ donné dans l'exemple précédent est une variété differentielle.

Definition 12

On appelle:
1)Atlas de la variété M , tout C^p-atlas appartenant à la classe d'équivalence définissant la structure de variété de M
2)Dimension de la variété, la dimension des cartes
3)carte de la variété M,toute carte appartenant à l'atlas complet de M
4)Carte de M en x,toute carte $c = (U, \varphi)$ telle que $x \in U$.

Remark 13

On va travailler par la suite avec une variétés pure c'est à dire une variété pour laquelle toutes les cartes sont de même dimension comme l'exemple des variétés connexes.
Une carte $C = (U, \varphi, n)$ sera donc notée par $C = (U, \varphi)$, l'entier n est appelé dimension de la variété

Exemples de Variétés differentielles:
1)Sur un espace vectoriel E on a un atlas (A) constitué de l'unique carte $C = (E, \varphi, n)$ où $\varphi \in Isom(E, \mathbb{R}^n)$
2) Tout ouvert N d'une variété M est une variété il suffit de prendre $C' = (U \cap N, \varphi\mid_{U\cap N}, n)$ une carte de N où $C = (U, \varphi, n)$ est une carte de M
3)Produit de variétés
4)L'image d'une variété par un homéomorphisme
5)Espace quotient
6)l'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$
7)La sphère $S_n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}/x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ est une variété.

2 Applications differentiables:

Soient M et M' deux variétés differentielles de classes respectives C^p et $C^{p'}$ et de dimensions respectives n et n'
On dit qu'une application continue $f : M \to M'$ est differentiable de classe C^q où $q \leq \inf\{p, p'\}$ si pour toute carte $C = (U, \varphi)$ de M et toute carte $C' = (U', \varphi')$ de M telle que $f(U) \subset U'$l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable de classe C^q de $\varphi(U \cap f^{-1}(U'))$ dans $\mathbb{R}^{n'}$

Proposition 14

Pour que$f : M \to M'$ soit differentiable de classe C^q où $q \leq \inf\{p, p'\}$ il faut et il suffit que $\forall x \in M$ il existe une carte $C = (U, \varphi)$ de M en x et il existe une carte $C' = (U', \varphi')$ de M' en $f(x)$ telles que l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit différentiable de classe C^q

Notation 15

L'ensemble des applications differentiables de classe C^q de M dans M' est appelé C^q-morphisme et est noté par $C^q\ (M, M')$

Definition 16

on appelle difféomorphisme de classe C^q de M dans M' toute bijection $f : M \to M'$ telle que $f \in C^q\ (M, M')$ et $f^{-1} \in C^q\ (M', M)$

On note l'ensemble des difféomorphismes de classe C^q de M dans M' par $Diff^q(M, M')$ et on note l'ensemble des difféomorphismes de classe C^q de M dans M par $Diff^q(M)$

Example 17

$P_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe au quotient de la sphère S_n par le sous groupe $\{\pm 1\}$ du groupe orthogonal

3 Espaces Tangents, Applications tangentes.

3.1 Espaces Tangents

Soit M une variété differentielle de classe C^p et de dimension n

Soit $x \in M$ et soit $\Theta_x = \{u : V(0) \to M \text{ tel que } u(0) = x\}$ où $V(0)$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$

Soit $C = (U, \varphi)$ une carte de M en x

On définit sur l'ensemble Θ_x la relation d'équivalence $\Re$ par:

$$u \Re v \Leftrightarrow (\varphi \circ u)'(0) = (\varphi \circ v)'(0)$$

On pose $T_x M = \Theta_x / \Re$ et soit $\rho_x : \Theta_x \to T_x M$ la surjection canonique.

.

Soit $\xi \in T_x M$ on pose $d_x\varphi(\xi) = (\varphi \circ u)'(0)$ où $u \in \rho_x^{-1}(\xi)$

Definition 18

L'ensemble T_xM muni de l'unique structure d'espace vectoriel réel tel que $d_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ soit un isomorphisme est appelé espace tangent
et tout élément de T_xM est appelé vecteur tangent.

Remark 19

il existe toujours une telle structure d'espace vectoriel et elle est unique.

Remark 20

$\dim T_xM = \dim M = n$

3.2 Applications tangentes:

soient M, M' deux variétés differentielles et soit $f \in C^q(M, M'), q \geq 1$
pour tout $x \in M, f$ définit une application $\widetilde{f_x} : \Theta_x \to \Theta'_{f(x)}$ par $\widetilde{f_x}(u) = f \circ u$, $\forall u \in \Theta_x$

Theorem 21

Il existe une unique application $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}M'$ telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \overset{T_xf:}{\rightarrow} & T_{f(x)}M' \\ \rho_x \uparrow & & \uparrow \rho'_{f(x)} \\ \Theta_x & \overset{\widetilde{f_x}}{\rightarrow} & \Theta'_{f(x)} \end{array}$$

Theorem 22

1)l'application $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}M'$ est linéaire.
2)Pour toute carte $C = (U, \varphi)$ une carte de M en x et toute carte $C' = (U', \varphi')$ une carte de M' en $f(x)$ on a:

$$T_xf = (d_{f(x)}\varphi')^{-1} \circ D(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ d_x\varphi$$

Definition 23

L'application linéaire T_xf est appelée application tangente à f en x

4 Immersions,Submersions, Sous variétés.

4.1 Immersions,Submersions

f est une immersion en $x \in M$ (resp.submersion en x) si l'application tangente $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} M'$ est injective (resp.surjective)

si f est une immersion en $x \in M$ alors $\dim M \leq \dim M'$

si f est une submersion en $x \in M$ alors $\dim M \geq \dim M'$

Definition 24

On dit que $f \in C^q(M, M')$ est une immersion de M dans M' (resp.submersion de M dans M') si elle est une immersion(resp.submersion) en tout point de M

Notation 25

l'ensemble des immersions de classe C^q de M dans M' est noté par $\mathrm{Im}^q(M, M')$; $(q \geq 1)$

l'ensemble des submersions de classe C^q de M dans M' est noté par $Sub^q(M, M')$; $(q \geq 1)$

Theorem 26

Soient $M, M', M"$ des variétés de classe $C^p, p \geq 1, f \in C^0(M, M'), g \in C^0(M', M")$

1) Si $g \in \mathrm{Im}^p(M', M")$ et $g \circ f \in C^p(M, M")$, alors $f \in C^p(M, M')$

2)Si $f \in Sub^p(M, M')$ et est surjective et si $g \circ f \in C^p(M, M")$alors $g \in C^p(M', M")$

Definition 27

Soient M, M' deux variétés differentielles et soit $f \in C^q(M, M')$, $q \geq 1$

Soit $x \in M$,on appelle rang de f en x, l'entier noté $rg_x f$ qui est égal au rang de l'application linéaire $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} M'$

Theorem 28 *(du rang)*

Soient M, M' deux variétés de classe $C^p; (p \geq 1)$ de dimensions respectives n et $n', f \in C^p(M, M')$ et $x \in M$.

S'il existe un voisinage V de x dans M tel que le rang de f soit constant $= k$ sur V alors il existe une carte $C = (U, \varphi)$ une carte de M en x et une carte $C' = (U', \varphi')$ de M' en $f(x)$

telles que la fonction $\varphi' \circ f \circ \varphi$ coincide sur $\varphi(U \cap f^{-1}(U') \cap V)$ avec l'application $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ définie par:

$$p(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, ..., a_k, 0, ..., 0)$$

Remark 29

-Si $f \in C^q(M, M')$ est une immersion en x alors elle satisfait le théorème du rang avec $k = n = \dim M$

-Si $f \in C^q(M, M')$ est une submersion en x alors elle satisfait le théorème du rang avec $k = n' = \dim M'$

Definition 30

Soient M, M' deux variétés de classe $C^p; (p \geq 1)$ et soit $f \in C^p(M, M')$.

On dit que f est un difféomorphisme local en $x \in M$ s'il existe un ouvert U de M contenant x tel $f \mid_U$ soit un C^p-difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert de $f(x)$ dans M'

Proposition 31

$f \in C^p(M, M')$ est un difféomorphisme local en $x \in M$ si et seulement si f est à la fois une immersion en x et une submersion en x

Theorem 32

Si $f \in C^p(M, M')$ est bijective et est un difféomorphisme local en tout point de M alors $f \in Diff^p(M, M')$

4.2 Sous variétés

Soit M une variété differentielle de dimension n .

Un sous ensemble N de M est dit sous-variété de M de codimension k $(k \leq n)$ si pour tout $x \in N$, il existe une carte $C_x = (U_x, \varphi_x)$ de M en x telle que:

$$\varphi_x(U_x \cap N) = \varphi_x(U_x) \cap \mathbb{R}^{n-k}$$

où $\mathbb{R}^{n-k}$ est identifié au sous espace $\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$

La carte $C_x = (U_x, \varphi_x)$ est dite carte adaptée à la sous variété N.

Theorem 33

Soit N une sous-variété de codimension k d'une variété M de classe C^p et de dimension n.

il existe sur N une unique structure de variété de classe C^p telle que:

i)La topologie qui lui est canoniquement associée soit la topologie induite sur N par la topologie de M

ii)L'injection canonique de N dans M soit une immersion de classe C^p.

Remark 34

les théorèmes ci-dessous permettent entre autres de démontrer qu'un ensemble est une variété sans passer par la construction d'atlas.

Theorem 35

Pour qu'un sous-ensemble N d'une variété M soit une sous-variété de codimension k il faut et il suffit que pour tout point $x \in N$, il existe un voisinage ouvert V_x

de x dans M et une submersion $g_x : V_x \to \mathbb{R}^k$ tels que:

$$g_x^{-1}(0) = N \cap V_x$$

Theorem 36

Soient M et M' deux variétés de classe C^p , $f \in Sub^p(M, M')$ et soit N' une sous-variété de M' de codimension k.

Si $N = f^{-1}(N') \neq \emptyset$ alors N est une sous-variété de M de codimension k et on a:

$$T_x N = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} N'); \forall x \in N$$

Theorem 37

Soient M et M' deux variétés de classe C^p et soit $f \in C^p(M, M')$ une application de rang constant $= k$ sur M.

alors $\forall y \in f(M)$, l'ensemble $N = f^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de M de codimension k et on a:

$$T_x N = \ker T_x f; \forall x \in N$$

5 Serie d'exercices:

Exercice1:

1)Trouver en utilisant les projections stéréographiques un atlas (A) de la sphère $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

2)Démontrer que la topologie $\tau_{(A)}$ est séparée.

3)Expliquer comment trouver par les projections stéréographiques un atlas (A) de la sphère S_n ; $n \geq 3$.

Exercice2:

1)Démontrer que la relation "$\sim$ "entre C^p-atlas est une relation d'équivalence

2)Démontrer que:

Si $(A) \sim (B)$ alors $\tau_{(A)} = \tau_{(B)}$

Exercice3:

Démontrer que pour tout C^p-atlas (A) d'un ensemble E il existe un unique C^p-atlas saturé équivalent à (A)

Exercice4:

Démontrer q'une variété differentielle est localement connexe et localement compacte.

Exercice5:

Démontrer que $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ est une variété differentielle

où $M(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carré réelles d'ordre n

Exercice6:

Soient M_1 et M_2 deux variétés de classe C^p de dimensions respectives n_1 et n_2

1)Construire une carte $C = (U, \varphi, n_1 + n_2)$ puis un atlas (A) de l'ensemble $M_1 \times M_2$

2)Démontrer que la topologie canoniquement associée à (A) est une topologie séparée

3)Donner les structures de variétés des ensembles suivants:

i)$\mathbb{R} \times S_1$ ii)$S_1 \times S_5$

Exercice7:

Soit $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

on munit S_1 de l'atlas $(A) = \{C_1, C_2\}$ défini par les projections stéréographiques

Etudier la differentiabilité de la fonction f définie par:

$$f : S_1 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to f(x,y) = \frac{y}{x+2}$$

Exercice8:

Soient $M, M', M"$ trois variétés differentielles de classes respectives $p, p', p"$ et soient $f \in C^q(M, M'), 1 \leq q \leq \inf\{p, p'\}; g \in C^s(M', M"), 1 \leq s \leq \inf\{p', p"\}$

Démontrer que $g \circ f \in C^t(M, M"); t = \inf\{q, s\}$

Exercice9

Soient $M, M', M"$ trois variétés differentielles de classes respectives $p, p', p"$ et soient $f \in C^q(M, M'), 1 \leq q \leq \inf\{p, p'\}; g \in C^s(M', M"), 1 \leq s \leq \inf\{p', p"\}$

1)Démontrer que $\forall x \in M$ on a:

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f$$

2)En déduire que si f et g sont des submersions alors $g \circ f$ est une submersion

Exercice10:

Soient M_1 ,M_2 ,N trois variétés differentielles et soient les applications $f_1 : N \to M_1$ et $f_2 : N \to M_2$

Démontrer que l'application $f = (f_1, f_2) : N \to M_1 \times M_2$ est differentiable de classe $C^p(p > 0$,ou $p = \infty)$ si et seulement si les applications f_1 et f_2 le sont.

Exercice11:

Démontrer que:

Pour qu'un sous-ensemble N d'une variété M soit une sous-variété de codimension k il faut et il suffit que pour tout point $x \in N$, il existe un voisinage ouvert V_x

de x dans M et une submersion $g_x : V_x \to \mathbb{R}^k$ tels que:

$$g_x^{-1}(0) = N \cap V_x$$

Exercice12:

Démontrer que $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) :^t A = A^{-1}\}$ est une variété differentielle.

Références:

1)M.berger et B.Gostiaux:Géométrie differentielle.Variétés, Courbes et Surfaces.P.U.F(1987)

2)J.Braemer et Y.Kerbrat:géométrie des courbes et des surfaces

2)J.Dieudonné:éléments d'analyse , tome3, Edition Jacques Gabay.

3)V. guedj:Géométrie differentielle

4)Y. kerbrat:Cours de D.E.A en géométrie differentielle 1985, Université Claude Bernard, Lyon, France

5)A. Lesfari:Géométrie

6)P.Pansu:Géométrie differentielle