Université de BADJI Mokhtar ANNABA

Faculté des sciences **2019/2020**

Department de mathématiques

Solution de la serie 3, l exercice 9

Dr. GASMI SOUAD

BACK TO SCHOOL

AVANT DE COMMENCER

RESTEZ CHEZ VOUS. SAUVEZ DES VIES.

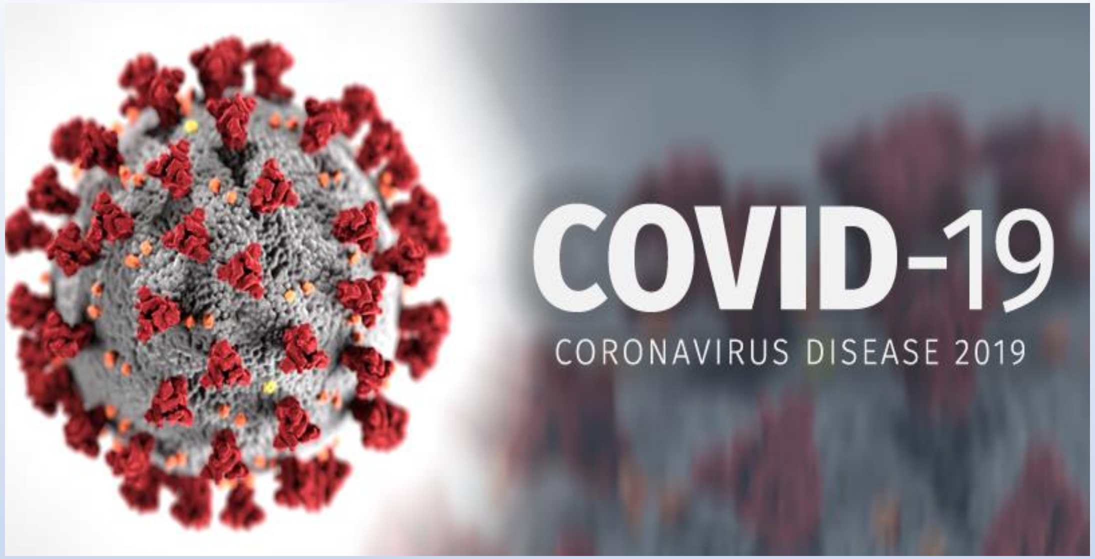
1-RESTEZ chez vous autant que possible.

2-GARDEZ une distance de sécurité.

3-LAVEZ-VOUS souvent les mains.

4-COUVREZ-VOUS la bouche quand vous toussez.

5-VOUS ÊTES MALADE ? Appelez votre médecin.



Exercice 9

- On a le systeme d equation compose de trois equations avec trois inconnues suivant: $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$ …… (s)
- 1/ montrons que le systeme (s) est de Cramer:
- Ça veut dire que ls systeme admet une solution unique.
- On a: $le\ systeme\ AX = b\ est\ de\ Cramer \Leftrightarrow \det A \neq 0$
- Alors, on va, premierement, ecrire le systeme sous la forme $AX = b$ (dite forme matricielle):

C-a-d, : $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$

On va calculer le determinant de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= +1. \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 2. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4(-5) - (-3)6) - 1(2(-5) - (-3)3) + 2\big(2(6) - 4(3)\big)$$
$$= -2 - (-1) + 0 = -1 \neq 0$$

Alors, le systeme (S) est de Cramer.

2/ Trouvons la solution:

On cherche les matrices A_1, A_2, A_3 comme suit:

- Dans A_1, on remplace la premiere colonne par le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

- Dans A_2, on remplace la deuxieme colonne par le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- Dans A_3, on remplace la troisieme colonne par le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcul les determinants de A_1, A_2 et A_3:

$$* \det(A_1) = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 9.\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 9(4(-5) - (-3)6) - 1(1(-5) - (-3)0) + 2\big(1(6) - 4(0)\big)$$
$$= -18 - (-5) + 12 = \boxed{-1}$$

$$* \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1. \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - 9. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1(-5) - (-3)0) - 9(2(-5) - (-3)3) + 2\big(2(0) - 1(3)\big)$$

$$= -5 - (-9) - 6 = \boxed{-2}$$

$$* \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 9.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4(0) - (1)6) - 1(2(0) - (1)3) + 9\big(2(6) - 4(3)\big)$$
$$= -6 - (-3) + 0 = \boxed{-3}$$

Finalement, on peut calculer les sulutions du systeme (S) comme suit:

$$*x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$*y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$*z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Alors, $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1}$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-2}{-1} = \boxed{2}$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}$$

Donc, les solutions du systeme (S) sont: $x = 1, y = 2 \; et \; z = 3$.

Conclusion

- Systeme de Cramer $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$
- Les solutions sont: $x = \frac{\det A_1}{\det A}, y = \frac{\det A_2}{\det A}$ et $z = \frac{\det A_3}{\det A}$.

Bon courage