



Université de BADJI Mokhtar ANNABA

Faculté des sciences

2019/2020

Department de mathématiques

Solution de la serie 2, l exercice 4

Dr. GASMI SOUAD



BACK TO SCHOOL

AVANT DE COMMENCER

RESTEZ CHEZ VOUS. SAUVEZ DES VIES.

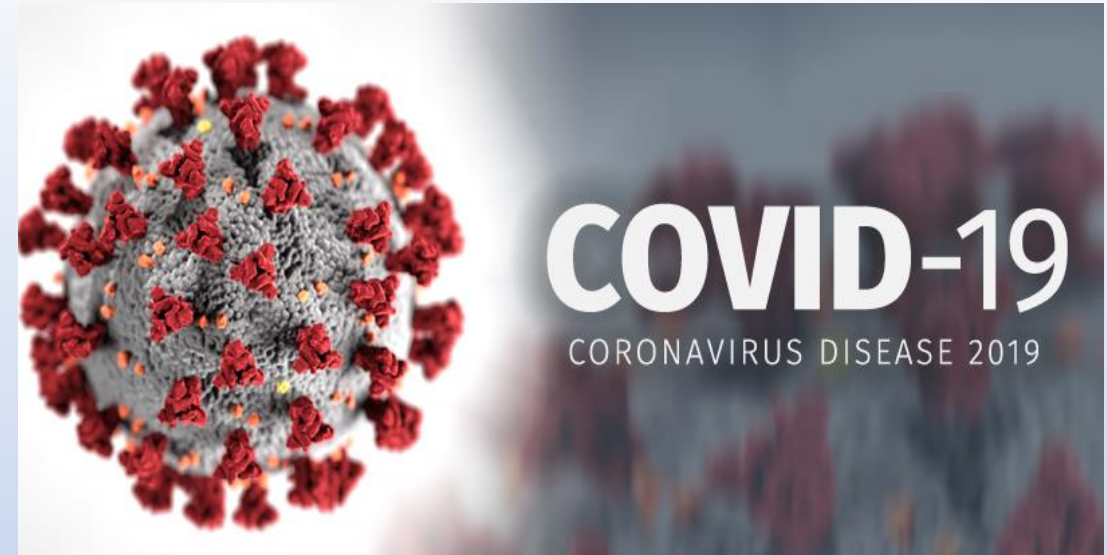
1-RESTEZ chez vous autant que possible.

2-GARDEZ une distance de sécurité.

3-LAVEZ-VOUS souvent les mains.

4-COUVREZ-VOUS la bouche quand vous toussiez.

5-VOUS ÊTES MALADE ? Appelez votre médecin.



Exercice 4:

On a l'application linéaire f de E dans E .

On rappelle que $\ker f$ est une partie de l'ensemble de départ E ,

Et $\operatorname{Im} f$ est une partie de l'ensemble d'arrivée E .

$$[\ker f = \operatorname{Im} f] \Leftrightarrow [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f]$$

Pour montrer une équivalence, on va montrer les implications dans les deux sens.

$(\Leftrightarrow)$ veut dire $(\Rightarrow \text{ et } \Leftarrow)$

C-a-d, on va montrer deux choses:

$$1/ [\ker f = \operatorname{Im} f] \Rightarrow [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f]$$

$$2/ [\ker f = \operatorname{Im} f] \Leftarrow [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f]$$

1/ Montrons que $[\ker f = \operatorname{Im} f] \Rightarrow [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f]$:

On a $\ker f = \operatorname{Im} f$ comme donne

Et on va montrer que $f \circ f = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg} f$

a/ Soit $x \in E \Rightarrow f(x) \in \operatorname{Im} f$

$$\Rightarrow f(x) \in \ker f \quad (\text{car } \ker f = \operatorname{Im} f)$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = 0 \quad (\text{car } f(x) \in \ker f \text{ c-a-d, son image } = 0)$$

$$\Rightarrow f \circ f = 0$$

b/ d apres le theoreme du rang: $rg(f) + \dim \ker f = \dim E$

Et selon l ennonce de l exercice: $\dim E = n$,

c-a-d, $rg(f) + \dim \ker f = n$ (1)

Et on a $rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$ (d apres la definition du *rang*)
 $= \dim \ker f$ (car $\ker f = \operatorname{Im} f$)

On remplaçant $rg(f) = \dim \ker f$ dans (1):

$$rg(f) + rg(f) = n \Rightarrow 2rg(f) = n$$

Alors, selon a/ et b/ on a $[\ker f = \operatorname{Im} f] \Rightarrow [f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 rg f]$

2/ Montrons que $[f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f] \Rightarrow [\ker f = \operatorname{Im} f]$

On a $f \circ f = 0$ et $n = 2 \operatorname{rg} f$ comme des données

Et on va montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$:

$\ker f = \operatorname{Im} f$ c-a-d, $\ker f \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f \subset \ker f$

Mais dans notre cas,

on va montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f$

a/ Soit $y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ (par définition)

$$\Rightarrow f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x)$$

$$\Rightarrow f(y) = 0 \quad (\text{car } f \circ f = 0)$$

$$\Rightarrow y \in \ker f \quad (\text{par définition du } \ker)$$

On a pris y de Im et on a trouvé que $y \in \ker f$, alors, $Im f \subset \ker f$

b/ On a selon les données $n = 2 \operatorname{rg} f$

Et par définition $\operatorname{rg} f = \dim Im f \dots\dots\dots(1)$

Alors, $\dim Im f = \frac{n}{2} \dots\dots\dots(2)$

Et d'après le théorème du rang $\operatorname{rg} f + \dim \ker f = \dim E = n \dots\dots(3)$

En remplaçant (1) dans (3), on obtient:

$\dim Im f + \dim \ker f = n \Rightarrow \dim \ker f = n - \dim Im f \dots\dots(4)$

En remplaçant (2) dans (4):

$$\dim \ker f = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

On a trouvé que $\dim \ker f = \frac{n}{2}$ et $\dim \operatorname{Im} f = \frac{n}{2}$, alors,

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f$$

D'après a/ et b/ on dit que $[f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f] \Rightarrow [\ker f = \operatorname{Im} f]$

Alors, $[f \circ f = 0 \text{ et } n = 2 \operatorname{rg} f] \Leftrightarrow [\ker f = \operatorname{Im} f]$

Bon courage

