Série N°3 (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA-MA (2019–2020)

Exercice 1 *Utilisez la méthode de Newton pour trouver un point minimisant de*

$$f(x,y) = 5x^4 + 6y^4 - 6\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2 + 15\,x - 7\,y + 13$$

Partez de $(x_0\,,\,y_0) = (1\,,\,1)$.

Solution: Calculant d'abord le gradient g et le hessien h de la fonction f.

$$g(x,y) = \left(20x^3 - 12x + 2y + 15\,,\; 24y^3 + 2x + 10y - 7\right)^T$$
$$h(x,y) = \begin{bmatrix} 60\,x^2 - 12 & 2 \\ 2 & 72\,y^2 + 10 \end{bmatrix}$$

l'inverse de h est donnée formellement par

$$[H(x,y)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{36\,y^2+5}{1080\,x^2y^2+150\,x^2-216\,y^2-31} & -\frac{1}{2}\left(1080\,x^2y^2 + 150\,x^2 - 216\,y^2 - 31\right)^{-1} \\ -\frac{1}{2}\left(1080\,x^2y^2 + 150\,x^2 - 216\,y^2 - 31\right)^{-1} & 3\,\frac{5\,x^2-1}{1080\,x^2y^2+150\,x^2-216\,y^2-31} \end{bmatrix}$$

La méthode de Newton est donnée par

$$\begin{cases} x_{k+1} & = x_k + d_k \\ d_k & = -\left[h^{-1}(x_k, y_k)\right] g(x_k, y_k) \end{cases} \tag{1}$$

En substituant les expressions du gradient et du hessien dans (1), on obtient

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}\,\frac{(36\,{y_k}^2 + 5)\,(20\,{x_k}^3 - 12\,x_k + 2\,y_k + 15)}{1080\,{x_k}^2{y_k}^2 + 150\,{x_k}^2 - 216\,{y_k}^2 - 31} + \frac{1}{2}\,\frac{24\,{y_k}^3 + 2\,x_k + 10\,y_k - 7}{1080\,{x_k}^2{y_k}^2 + 150\,{x_k}^2 - 216\,{y_k}^2 - 31}$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\,\frac{20\,{x_k}^3 - 12\,x_k + 2\,y_k + 15}{1080\,{x_k}^2{y_k}^2 + 150\,{x_k}^2 - 216\,{y_k}^2 - 31} - 3\,\frac{(5\,{x_k}^2 - 1)\,(24\,{y_k}^3 + 2\,x_k + 10\,y_k - 7)}{1080\,{x_k}^2{y_k}^2 + 150\,{x_k}^2 - 216\,{y_k}^2 - 31}$$

Les premières itérations de méthode Newton en partant de $(x_0\,,\,y_0) = (1\,,\,1)$:

- $(x_1, y_1) = (0.4933875890\,, 0.6586978637)$
- $(x_2,\, y_2) = (-4.464349613\,,\, 0.7188967310)$
- $(x_3\,,\, y_3) = (-3.020177683\,,\, 0.6539652503)$
- $(x_4\,,\, y_4) = (-2.088864692\,,\, 0.6031153494)$
- $\ldots\ldots$

— $(x_{10}\,,\,y_{10})$ =$(-1.142054928\,,\,0.5433724812)$
avec $g(x_{10}\,,\,y_{10}) = (2.2\,10^{-8}\,,\,1.0\,10^{-9})$. Le minimum est donc $(x^*\,,\,y^*) \approx (-1.142054928\,,\,0.5433724812)$
■

Exercice 2 *Utilisez la méthode de Newton modifiée (avec une recherche unidimensionnelle) pour la résolution de*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^n} \; 2\,x^2 + y^2 - 2\,x\,y + 2\,x^3 + x^4$$

Effectuez seulement les deux premières itérations et partez de $(2\,,\,-1)$.

Solution: Calculant d'abord le gradient g et le hessien h de la fonction f.

$$g(x,y) = \left(4\,x - 2\,y + 6\,x^2 + 4\,x^3, 2\,y - 2\,x\right)^T$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 4 + 12\,x + 12\,x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

l'inverse de h est donnée formellement par

$$[H(x,y)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2\,\left(1 + 6\,x + 6\,x^2\right)^{-1} & 1/2\,\left(1 + 6\,x + 6\,x^2\right)^{-1} \\ 1/2\,\left(1 + 6\,x + 6\,x^2\right)^{-1} & \frac{1+3\,x+3\,x^2}{1+6\,x+6\,x^2} \end{bmatrix}$$

La méthode de Newton modifiée est donnée par

$$\begin{cases} x_{k+1} & = x_k + t_k\,d_k \\ d_k & = -\left[h^{-1}(x_k, y_k)\right] g(x_k, y_k) \\ t_k & = \arg\min\{f(x_k + td_k),\, t > 0) \end{cases} \tag{2}$$

A chaque itération on calculera t_k comme solution de l'équation

$$\theta'(t) \equiv \frac{d}{dt} f(x_k + td_k) = 0$$

En substituant les expression du gradient et du hessien dans (1), on obtient

$$x_{k+1} = x_k - t_k \left(1/2\,\frac{4\,x_k - 2\,y_k + 6\,{x_k}^2 + 4\,{x_k}^3}{1 + 6\,x_k + 6\,{x_k}^2} + 1/2\,\frac{2\,y_k - 2\,x_k}{1 + 6\,x_k + 6\,{x_k}^2}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k - t_k \left(1/2\,\frac{4\,x_k - 2\,y_k + 6\,{x_k}^2 + 4\,{x_k}^3}{1 + 6\,x_k + 6\,{x_k}^2} + \frac{\left(1 + 3\,x_k + 3\,{x_k}^2\right)\left(2\,y_k - 2\,x_k\right)}{1 + 6\,x_k + 6\,{x_k}^2}\right)$$

Les premières itérations de méthode Newton modifiée en partant de $(x_0\,,\,y_0) = (2\,,\,1)$:

0. $\theta'(t) = -\frac{53}{37} + \frac{949}{1369}\,t \;\;\Rightarrow t_0 = 1961/949 \approx 2.066385669$

1. $(x_1, y_1) = (2.066385669\,, 0.324552160)$, $\;\theta'(t) = -1.823049784 + 1.638056870\,t \Rightarrow t_1 = 1.112934366$

2. $(x_2,\, y_2) = (0.1041219991\,,\, -0.016309591),\;\; \theta'(t) = -0.009182571 + 0.0082186965\; t \;\;\Rightarrow\; t_2 = 1.1172783$

■

Exercice 3 *Montrer que Toute matrice A symétrique et définie positive admet une racine carré i.e. il existe une matrice $A^{1/2}$ telle que*

$$A = A^{1/2} A^{1/2}$$