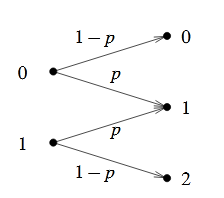
**EXERCICES SUR LA LES CANAUX DISCRETS**

**Exercice 1**

1. Déterminer la capacité du canal discret dont les probabilités de transition sont données par:

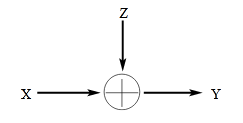


1. Deux canaux de transmission symétrique binaire de probabilité d'erreur p sont montés en cascade. Déterminez la capacité globale du canal.
2. Nous considérons un canal avec du bruit gaussien additif blanc dont la bande passante est égale à 4 kHz et la densité spectrale de puissance de bruit est égale à N0/2 = 10−12W / Hz. La puissance de signal requise au niveau du récepteur est égale à 0,1 mW. Calculez la capacité du canal.
3. Un signal analogique avec une largeur de bande de 4 kHz est échantillonné à 1,25 fois la fréquence de Nyquist, chaque échantillon est quantifié en 256 niveaux de probabilité égale. Nous supposons que les échantillons sont statistiquement indépendants.  
   1. Quel est le débit d'information source?
   2. Est-il possible de transmettre sans erreur les signaux de cette source sur un canal soumis à un bruit blanc additif gaussien avec une bande passante de 10 kHz et un rapport signal sur bruit de 20 dB?
   3. Calculer le signal nécessaire au bruit pour assurer une transmission sans erreur dans les conditions édictées en (b).
   4. Calculer la largeur de bande requise pour transmettre sans erreur les signaux de la même source à travers un canal avec un bruit blanc additif gaussien pour assurer un rapport signal / bruit de 20 dB.

On donne (voir figure ci-dessous)

**Exercice 2**

Trouvez la capacité du canal du canal sans mémoire discret suivant:



où Pr {Z = 0} = Pr {Z = a} = 1/2. L'alphabet pour x est X = {0,1}. Supposons que Z est indépendant de X. Observez que la capacité du canal dépend de la valeur de a.

**Exercice 3**

Considérons un canal symétrique binaire avec Yi = Xi⊕Zi, où ⊕ est l'addition de mod 2, et Xi, Yi∈ {0,1}. Supposons que {Zi} a des probabilités marginales constantes p (Zi = 1) = p = 1 − p (Zi = 0), mais que Z1, Z2, ···, Zn ne sont pas nécessairement indépendants. Soit C = 1 − H (p). Montrez que  


Commentez les implications.

**Exercice 4**

Considérons le canal Y = X + Z (mod 13), où



Où :



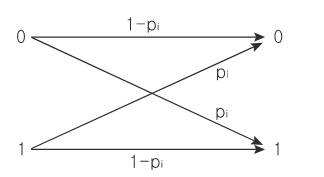
1. Trouvez la capacité.
2. (b) Quelle est la maximisation de p∗ (x)

**Exercice 5:**

Considérons un canal symétrique binaire discret sans mémoire. Soit Y1, Y2, ···, Yn indépendantes conditionnellement étant donné X1, X2, ···, Xn, avec une distribution conditionnelle donnée par



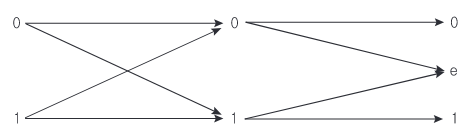
comme indiqué ci-dessous.

****

1. Trouver maxp(x) I(Xn; Yn)
2. Nous demandons maintenant la capacité pour la version invariante dans le temps de ce problème. Remplacez chaque pi, 1≤i≤n, par la valeur moyenne   
   et comparer la capacité à la partie (a).

**Exercice 6**

Supposons qu'un canal symétrique binaire de capacité C1 soit immédiatement suivi d'un canal d'effacement binaire de capacité C2. Trouvez la capacité C du canal résultant.



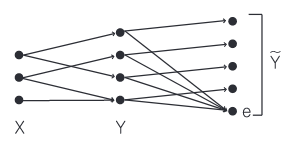
**Exercice 7**

Considérons maintenant un canal arbitraire discret sans mémoire suivi d'un canal d'effacement binaire, résultant en une sortie



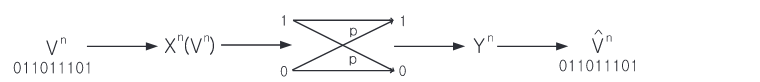


où e désigne l'effacement. Ainsi la sortie Y est effacée de probabilité α Quelle est la capacité de ce canal?

****

**Exercice 8**

Nous souhaitons coder un processus de Bernoulli (α) V1, V2, ··· pour une transmission sur un canal binaire symétrique avec une probabilité d'erreur p.





Trouver des conditions sur α et p pour que la probabilité d'erreur puisse aller jusqu'à zéro lorsque n → ∞

**Exercice 9**

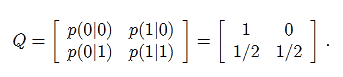
Soit X l'entrée et Y la sortie d'un canal symétrique binaire avec des probabilités de transmission p (y | x) = P (Y = y | X = x) donné comme



Montrer que I (X, Y) = H (p (1−2a) + a) −H (p), où a = P (X = 0) est la distribution de l'entrée.

**Exercice .10**

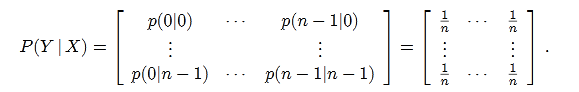
Un canal a un alphabet d'entrée et de sortie binaire et des probabilités de transition donnés par la matrice suivante:



Trouver la probabilité d'entrée maximisée de I (X, Y) et la capacité du canal

**Exercice 11**

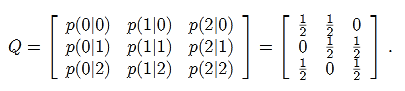
Soit les variables aléatoires X et Y respectivement l'entrée et la sortie d'un canal. Soit X, Y∈ {0,1,. . . , n − 1} = X, et que la matrice de transition soit donnée comme

****

Montrez que la capacité du canal est nulle.

**Exercice 12**

Soit X∈ {0,1,2} l'entrée et Y∈ {0,1,2} la sortie d'un canal avec matrice de transition (note: p (y | x): = P (Y = y | X = x))



Montrer que la capacité du canal est C = log2[3] −1

**Exercice 13 : Capacité d’un canal discret**

Considérons le canal discret sans mémoire Y = X + Z mod 11, où Z est donné par



Calculez la capacité de ce canal en supposant que Z est indépendant de X.

**Exercice 14 : Capacité d’un canal discret**

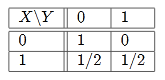
Considérons deux canaux discrets sans mémoire (avec bruit indépendant) (X1, p (y1| x1), Y1) et (X2, p (y2|x2), Y2) avec les capacités respectives C1 et C2. Nous formons un nouveau canal (X1 × X2, p ((y1, y2)|(x1, x2)), Y1 × Y2), où nous envoyons (x1, x2) simultanément via les canaux précédemment définis pour obtenir (y1, y2 ). La probabilité de transition est donnée par

p ((y1, y2) | (x1, x2)) = p (y1 | x1) p (y2 | x2).

Trouver la capacité du canal combiné.

**Exercice 16 : Canal discret**

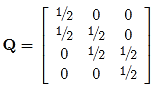
Soit le canal a un alphabet d'entrée et de sortie binaire et des probabilités de transition p (y | x) données par

****

Trouvez la capacité de ce canal et la distribution de probabilité d'entrée atteignant cette capacité.

**Exercice 17**

Un canal discret a pour entrée l’alphabet X={a, b, c} et l’alphabet de sortie Y={r, s, r, u}. Sa matrice de transition est la suivante :



Quelle es sa capacité ?