Chaînes de Markov-Partie 4.c

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

June 3, 2020

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base-Suite

1.1.1 Introduction

1.1.2 Dynamique markovienne

1.1.3 Distributions marginales

1.1.4 Propriété de Markov forte

1.1.5 Chaînes de Markov homogènes

1.1.6 Chaînes de Markov absorbantes

1.1.7 Chaînes de Markov irréductibles

1.1.8 Chaînes de Markov réversibles

1.1.9 Récurence, transience et période

On s'intéresse par l'étude de quelques propriétés des chaînes de Markov sur un ensemble dénombrable E. On définit le temps de premier passage de la chaîne en un site $i \in E$ est identifié par la variable aléatoire representée par la formule suivante:

$$\tau_i = \inf \{n \geq 1, X_n = i\}.$$

Par convention on a,

$$\tau_i = \infty, \text{ si } X_n \neq i, \forall n \geq 1.$$

Remarques

- On appelle τ_i le temps de premier retour en i, dans le cas où la chaîne démarre au temps 0 dans l'état i.

- Pour une chaîne irréductible et dans le cas où E est fini, le premier passage de la chaîne en un site i; τ_i est fini presque sûrement.

Définition Un état $i \in E$ est dit récurrent si:

$$P_i\{\tau_i \prec \infty\} = \lim_{N\to\infty} P_i\{\tau_i \leq N\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i\{\tau_i = n\} = 1.$$

La chaîne de Markov est appelée récurrente, si tous ses états sont récurrents.

Remarque

On considère un état récurrent, la chaîne de Makov revient vers cet état presque sûrement.

Définition Un état $i \in E$ est dit transient s'il n'est pas récurrent. La chaîne de Markov est appelée transiente, si tous ses états sont transients.

Remarque

Le fait qu'un état soit transient signifie que la chaîne de Markov a une probabilité non nulle de ne jamais retourner dans cet état.

Définition La période d'un état i est le nombre:

$$d_i = p\,\mathrm{gcd}\{n \geq 1 : P_i\{X_n = i\} \succ 0\}$$

Si $d_i = 1$, on dit que l' état i est apériodique. La chaîne de Markov est apériodique si tout état $i \in E$ est apériodique.

Exemple

Une chaîne régulière est apériodique. (à vérifier).

Remarque

On a introduit la relation d'équivalence $i \sim j$, les propriétés de récurrence, transience et la période sont constantes sur les classes d' équivalence. On définit les classes récurrentes ou transientes, et la période d'une classe. Si la chaîne est irréductible, alors elle est respectivement récurrente, transiente ou apériodique si et seulement si elle admet un état récurrent, transient ou apériodique.

1.1.10 Distributions stationnaires

On considère une chaîne de Markov irréductible sur un ensemble dénombrable E, de matrice de transition $P = (p_{i,j})$,avec $i, j \in E$.

Définition Une distribution de probabilité μ sur E est dite stationnaire, si elle vérifie la relation suivante:

$$\mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{i,j}, \forall j \in E.$$

Généralisation

Une mesure μ sur E vérifiant:

$$\mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{i,j}, \forall j \in E,$$

est appelée une mesure invariante de la chaîne de Markov.

Exemple

La chaîne irréductible admet une distribution stationnaire dans le cas d'espace E fini.

Exercice

Une personne possède 3 parapluies. Chaque jour, elle va au bureau le matin, et revient a son domicile le soir. Pour chaque trajet, elle emporte avec elle un parapluie s'il pleut, et s'il y en a au moins un sur place. Elle n'emporte pas de parapluie s'il ne pleut pas. On suppose que la probabilité qu'il pleuve au début de chaque trajet est de $\frac{1}{3}$, et qu'elle est indépendante de la météo lors de tous les autres trajets. Soit X_n le nombre de parapluies que cette personne possède sur place avant de débuter le nième trajet.

1. Montrer que$(X_n)_n$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
2. De quel type de chaîne s'agit-il?.
3. Quelle est la probabilité, asymptotiquement au bout d'un grand nombre de voyages, que la personne ne dispose pas de parapluie sur place au moment de partir?.
4. Quelle est la probabilité asymptotique qu'elle se fasse mouiller bêtement, (elle n'ait pas de parapluie à sa disposition alors qu'il pleut dés son départ)?.