Chaînes de Markov-Partie4.b

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

June 3, 2020

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base-Suite

1.1.1 Introduction

1.1.2 Dynamique markovienne

1.1.3 Distributions marginales

1.1.4 Propriété de Markov forte

1.1.5 Chaînes de Markov homogènes

1.1.6 Chaînes de Markov absorbantes

Définition On considère une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geq 0}$,On dit qu'un état $j \in E$ est accessible depuis un autre état $i \in E$, s'il existe un temps $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_{i,j}^{(n)} \succ 0$; partant de i, on atteint j avec probabilité positive en un nombre fini de pas.

Notation
Si l'état $j \in E$ est accessible depuis l'état i,on note $i \to j$.
Si on a à la fois $i \to j$ et $j \to i$, on note: $i \sim j$.

Remarque
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.(à vérifier)

Définition Un état i est dit absorbant si la probabilité $p_{i,i} = 1$, autrement dit $p_{i,j} = 0$ pour tout $j \neq i$. Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de E, un état absorbant accessible depuis cet état.

Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de E, un état absorbant accessible depuis cet état.

1.1.7 Chaînes de Markov irréductibles

Définition Une chaîne de Markov est dite irréductible ou ergodique si $i \sim j$, $\forall i, j \in E$. La chaîne est dite régulière s'il existe une puissance P^n de P dont tous les éléments sont strictement positifs.

Une chaîne de Markov régulière est nécéssairement irréductible, car tout état est accessible depuis tout autre en n pas au plus. La réciproque n'est pas vraie, car le nombre de pas n'est pas précisé dans la définition de l'irréductibilité.

Exemple

Dans le modèle d'Ehrenfest, la chaîne de Markov est irréductible. Quelque soit le nombre de boules (particules) dans l'urne à guanche, on peut atteindre tout autre état en déplacant au plus N boules d'une urne a l'autre. Mais la chaîne n'est pas régulière. Comme à chaque pas de temps on déplace exactement une boule, le nombre de boules dans l'urne de gauche sera pair et impair alternativement. Donc, chaque élément de P^n, matrice des puissances sera nul pour un n sur deux.

Définition Pour un sous-ensemble A de l'éspace E, on appelle temps de premier passage de la chaîne dans A la variable aléatoire définie par:

$$\tau_A = \inf \{n \succ 0, X_n \in A\},$$

si on conidère le cas particulier $A = \{i\}$, on note τ_A par τ_i au lieu de $\tau_{\{i\}}$.

1.1.8 Chaînes de Markov réversibles

On considère un espace d'état dénombrable, il peut être infini. L'ensemble $\digamma^E$ désigne l'ensemble des applications $f : E \to \digamma$.

Définition Soit P une matrice aléatoire (stochastique), un vecteur $(\alpha_i)_{i \in E}$ $\in [0, \infty)^E$, , est dit réversible par rapport à P si:

$$\alpha_i p_{ij} = \alpha_j p_{ji}, \forall i, j \in E.$$

Une chaîne de Markov est dite réversible si sa matrice admet un vecteur réversible.

La relation précédente définie par:

$$\alpha_i p_{ij} = \alpha_j p_{ji}, \forall i, j \in E$$

.est appelée condition d'équilibre détaillé en physique. Elle signifie que si les états i et j sont occupés avec probabilités proportionnelles ài et j respectivement, alors les taux de transition de i à j et de j à i sont égaux.

1.1.9