Exercice N° 1:

Soit la poutre AB (fig. 1a), encastré en A et ayant une section droite en forme de U (fig. 1b).

A) Exprimer les résultats en fonction des données suivantes: q, l, a et I_{GZ} pour les questions 1, 2 et 3.

1) Tracer le diagramme de l'effort tranchant Q et du moment fléchissant Mf.
2) Déterminer la position du centre de gravité G de la section droite, puis tracer $GZ // OZ$.
3) Tracer les diagrammes des contraintes normales σ et tangentielles τ agissant dans les sections dangereuses de la poutre AB.
4) Déterminer la position des sections droites dans lesquelles on a :
   a) la flexion pure   b) cisaillement pur

B) Prendre: $q = 200\ (N/cm)$, $l = 100\ (cm)$, $[\sigma] = 200\ (N/cm^2)$ et $[\tau] = 40\ (N/cm^2)$.

1) Déterminer le moment d'inertie I_{GZ} de la section droite puis calculer " a " pour que la pièce résiste.
2) Application numérique: Remplir le tableau suivant

$\lvert Q_{max} \rvert$	Mf_{max}	a	I_{GZ}	σ_{max}	τ_{max}
(N)	$(N.m)$	(cm)	(cm^4)	(N/cm^2)	(N/cm^2)
---	---	---	---	---	---

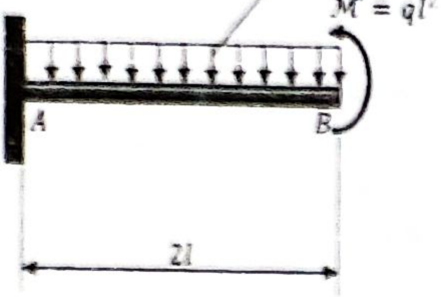


Fig. 1a

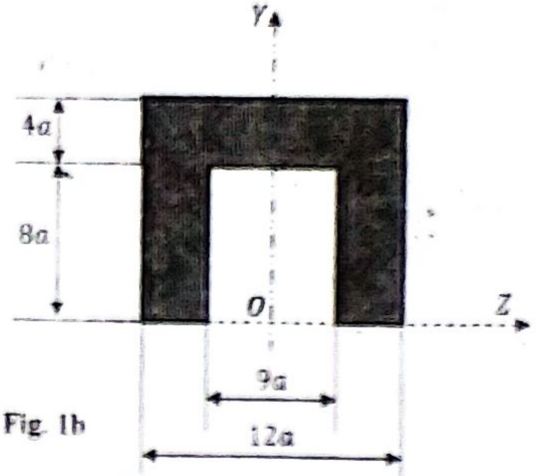


Fig. 1b

Exercice N° 2:

Soit la poutre AC (fig. 2a) de section S donnée (figure 2b).

1) Supposer l, a, $F = ql$, $M = 0.5\ ql^2$ et I_{GZ} connus:
   a) Tracer les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants Mf.
   b) Tracer les diagrammes des contraintes normales σ et tangentielles τ agissant dans les sections dangereuses.
   c) Déterminer les sections où agissent la flexion pure et le cisaillement pur.

2) Prendre $a = 1\ (cm)$, déterminer:
   a) les coordonnées de G dans le système d'axes OYZ.
   b) Le moment d'inertie I_{GZ} de la section droite S.

Chargés de cours   L. Kherredine   A. Chemami

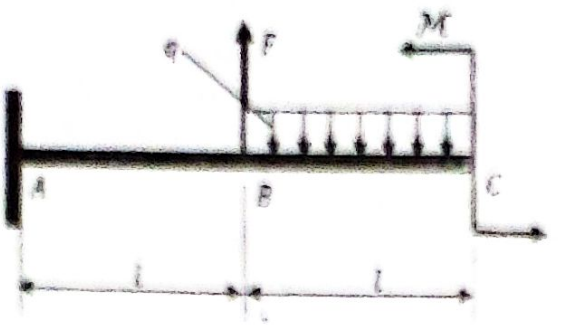


Fig. 2a

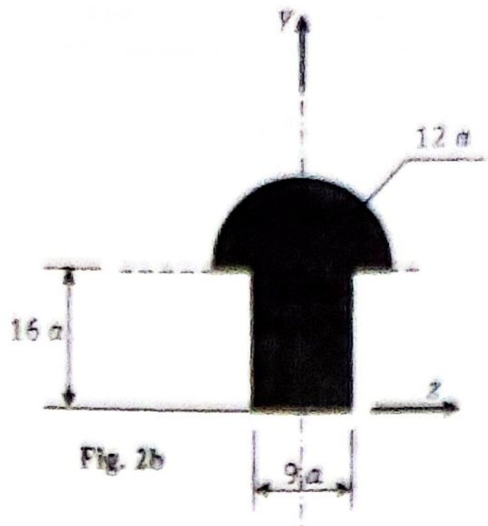


Fig. 2b

Exercice N° 2:

Soit la poutre AC de section S donnée (voir figures 3a et 3b).

1) Supposer l, a, $F = ql$, $M = 0.5\, ql^2$ et I_{GZ} connus:

   a) Tracer les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants Mf.

   b) Tracer les diagrammes des contraintes normales σ et tangentielles τ agissant dans les sections dangereuses.

   c) Déterminer les sections où agissent la flexion pure et le cisaillement pur.

2) Prendre $a = 1$ (cm), déterminer

   a) les coordonnées de G dans le système d'axes OYZ.

   b) Le moment d'inertie I_{GZ} de la section droite S.

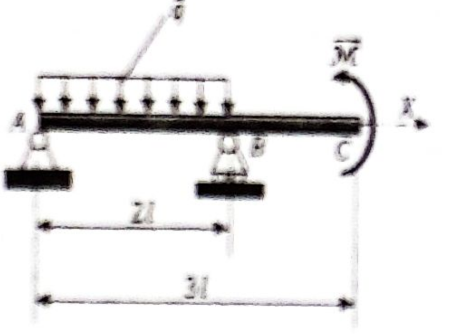


Fig. 3a

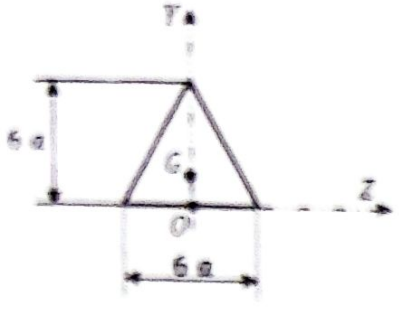
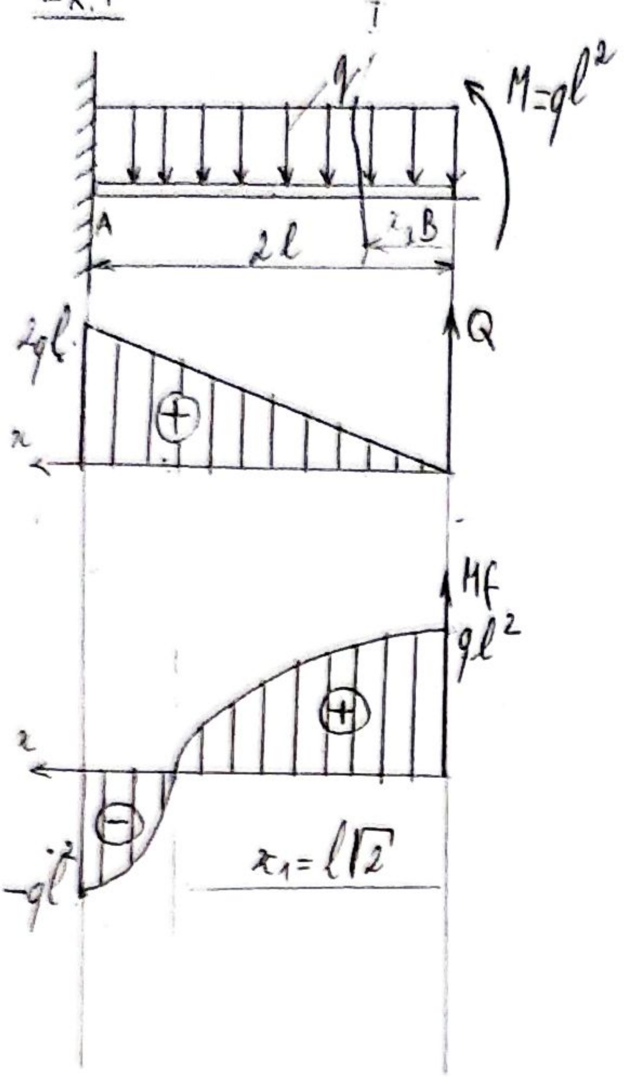


Fig. 3b

Ex.1

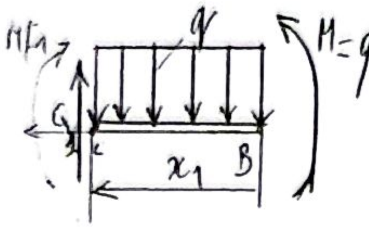


①

A) Soit à exprimer les résultats en fonction des données suivantes: q, l, a, I_{Gz}

1) Soit à tracer les diagrammes des efforts Q tranchants et des moments fléchissants M_f.

Tronçon I : $0 \leq x_1 \leq 2l$



$$\Sigma F_y = 0 = Q_1 - q x_1 = 0 \rightsquigarrow Q_1 = q x_1$$

Pour $x_1 = 0 \rightsquigarrow Q_1 = 0$

Pour $x_1 = 2l \rightsquigarrow Q_1 = 2ql$

$$\Sigma M = 0 = M - q\frac{x_1^2}{2} - M_{f_1} = 0$$

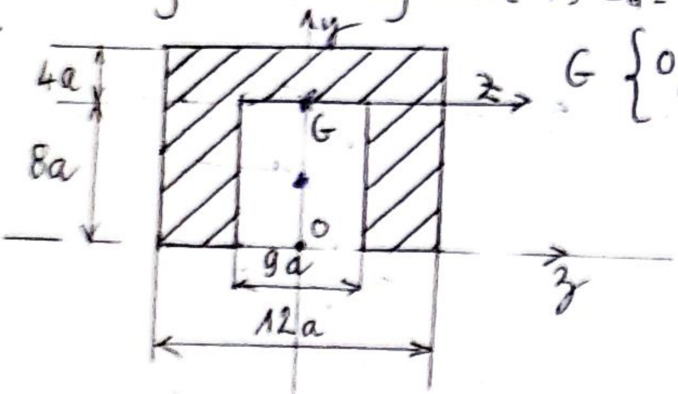
$$\rightsquigarrow M_{f_1} = M - q\cdot\frac{x_1^2}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \rightsquigarrow M_{f_1} = M = ql^2 \\ x_1 = 2l \rightsquigarrow M_{f_1} = -ql^2 \end{cases}$$

$$M_{f_1} = 0 = ql^2 - q\frac{x_1^2}{2} = 0 \rightsquigarrow x_1 = l\sqrt{2}$$

2) Soit à déterminer la position du centre de gravité: $y_G = 8a$

Oy : axe de symétrie $\rightsquigarrow z_G = 0$ et $y_G = \dfrac{\Sigma y_{Gi}\cdot S_i}{\Sigma S_i} = \dfrac{6a\cdot 144a^2 - 4a\cdot 72a^2}{144a^2 - 72a^2}$

$G\,\{0, 8a\}$



3) Soit à tracer les diagrammes des contraintes normales σ et tangentielles τ agissant dans les sections dangereuses.

(2)

les sections dangereuses sont celles où l'on a $M_{fmax} = ql^2$ et $Q_{max} = 2ql$

a) $\sigma = -\dfrac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y$ avec $M_{fmax} = ql^2$ et I_{Gz} supposé connu.

au point 1 $\rightsquigarrow y = 4a \rightsquigarrow \sigma_1 = -\dfrac{ql^2 \cdot 4a}{I_{Gz}} = -4\,aql^2/I_{Gz}$

au point 2 $\rightsquigarrow y = -8a \rightsquigarrow \sigma_2 = -\dfrac{ql^2 \cdot (-8a)}{I_{Gz}} = +8\,aql^2/I_{Gz}$

au point G $\rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow \sigma_G = 0$

b) $\tau = \dfrac{|Q_{max}|\,|S^*_{Gz}|}{I_{Gz} \cdot b_y}$

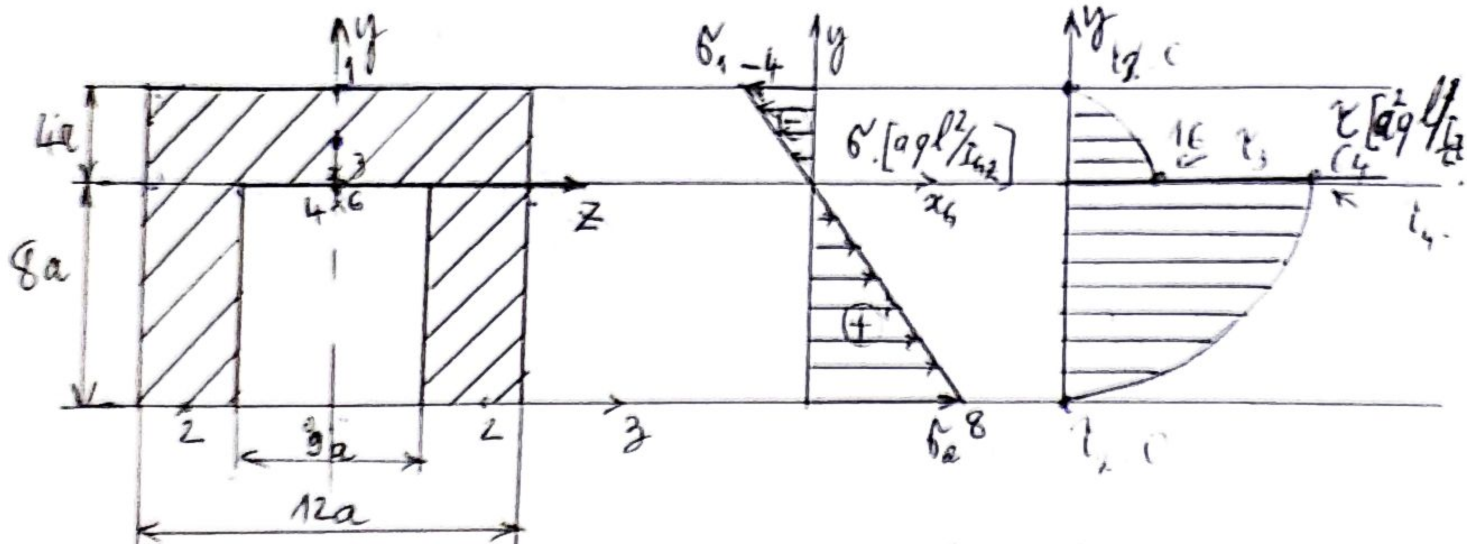
aux points 1 et 2, $S^*_{Gz_{1,2}} = 0 \rightsquigarrow \tau_1 = \tau_2 = 0$

au point 3 $\rightsquigarrow S^*_{Gz_3} = (12a \cdot 4a) \cdot 2a = 96a^3$

$b_{y_3} = 12a \rightsquigarrow \tau_3 = \dfrac{2ql \cdot 96a^3}{I_{Gz} \cdot 12a} = \dfrac{16\,qla^2}{I_{Gz}}$

au point 4 $b_{y_4} = 3a$

$\rightsquigarrow S^*_{Gz_4} = S^*_{Gz_3} = 96a^3$ $\Bigg\} \rightsquigarrow \tau_4 = \dfrac{2ql \cdot 96a^3}{I_{Gz} \cdot 3a} = \dfrac{64\,qla^2}{I_{Gz}} = \tau_G$



4) Soit à déterminer la position des sections dans lesquelles on a :

a) Flexion pure ($M_f \neq 0$, $Q = 0$) $\rightsquigarrow$ section située à $x_1 = 0$

b) Cisaillement pur ($M_f = 0$ $Q \neq 0$) $\rightsquigarrow$ section située à $x = l\sqrt{2}$

Ex. 1 (suite)

B] Pris : $q = 200\ N/cm$; $l = 100\ cm$; $[\sigma] = 200\ N/cm^2$; $[\tau] = 40\ N/cm^2$

1) Soit à déterminer le moment d'inertie central principal I_{Gz} de la section droite puis à calculer la dimension "a" pour que la pièce résiste.

a) Calcul du moment d'inertie I_{Gz} :

$$I_{Gz} = \left[\frac{12a.(4a)^3}{3}\right] + 2\left[\frac{1,5a.(8a)^3}{12} + (8a.1,5a).(4a)^2\right] = 768\,a^4$$

b) Calcul de "a" pour que la poutre résiste :

* $\sigma_{max} = \frac{|M_{fmax}|}{I_{Gz}} \cdot y_{max} \leqslant [\sigma] \rightsquigarrow \frac{ql^2 \cdot 8a}{768\,a^4} \leqslant [\sigma]$

$$\rightsquigarrow a \geqslant \sqrt[3]{\frac{ql^2}{96[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{200.100^2}{96.200}} = 4,70\ cm$$

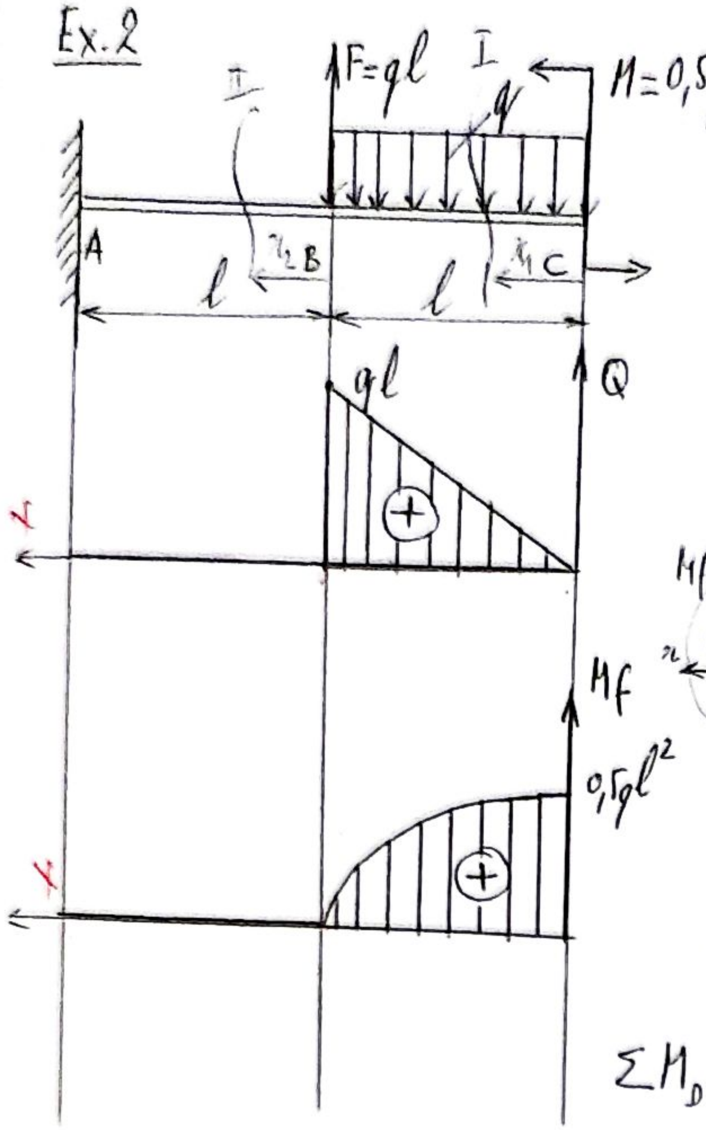
** $\tau_{max} = \frac{64\,qla^2}{768\,a^4} \leqslant [\tau] \rightsquigarrow a \geqslant \sqrt{\frac{ql}{12[\tau]}} = \sqrt[2]{\frac{200.100}{12.40}} = 6,45$

$\left.\begin{array}{l} a \geqslant 4,70\ cm \\ a \geqslant 6,45\ cm \end{array}\right\} \rightarrow$ on choisit $a = 6,5\ cm$

2) A.N. Soit à remplir le tableau suivant :

$\lvert Q_{max}\rvert$ [N]	M_{fmax} [Ncm]	a [cm]	I_{Gz} [cm^4]	σ_{max} [N/cm^2]	τ_{max} [N/cm^2]
4.10^4	200.10^4	6,5	1370 928	75,86	39,45

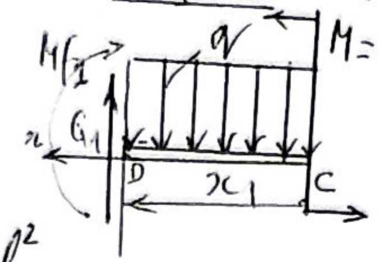
Ex. 2



Supposer connus: l, a, $F=ql$, $M=0{,}5ql^2$ et I_{Gz}

a) Soit à tracer les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants Mf.

Tronçon I $0 \leq x_1 \leq l$



$$\Sigma F_y = 0 = Q_1 - qx_1 = 0 \rightarrow Q_1 = qx_1$$

Pour $x_1 = 0 \rightarrow Q_1 = 0$

Pour $x_1 = l \rightarrow Q_1 = ql$

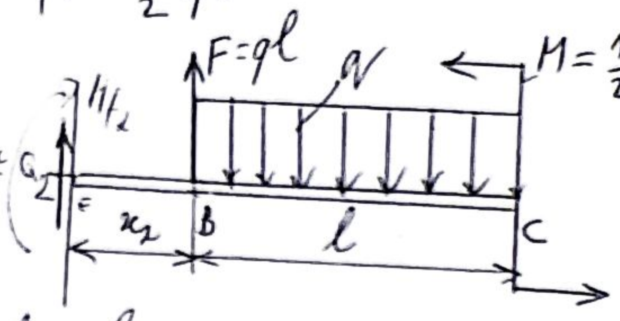
$$\Sigma M_D = 0 = M - M_{f_1} - qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0$$

$$\rightarrow M_{f_1} = M - q\frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{2}qx_1^2$$

$x_1 = 0 \rightarrow M_{f_1} = M \rightarrow M_{f_1} = \frac{1}{2}ql^2$

$x_1 = l \rightarrow M_{f_1} = 0$

Tronçon II: $0 \leq x_2 \leq l$



$$\Sigma F_y = 0 = Q_2 + F - ql = 0$$

$$\rightarrow Q_2 = -F + ql = -ql + ql = 0$$

$$\Sigma M_E = 0 = -M_{f_2} + M + Fx_2 - ql\left(\frac{l}{2} + x_2\right) = 0$$

$$\rightarrow M_{f_2} = M + F.x_2 - ql\left(\frac{l}{2} + x_2\right) = \frac{1}{2}ql^2 + qlx_2 - \frac{1}{2}ql^2 - qlx_2 = 0$$

b) Soit à construire les diagrammes des contraintes normales (σ) et tangentielles (τ) agissant dans les sections dangereuses. (5)

Les sections dangereuses sont celles où l'on a : $M_{f\,max} = \frac{1}{2} q l^2$ et $Q_{max} = q l$.

1) $$\sigma = -\frac{M_{f\,max} \cdot y}{I_{Gz}}$$

au point 1 $\rightsquigarrow y = 12a \rightsquigarrow \sigma_1 = -\frac{\frac{1}{2} q l^2 \cdot 12a}{I_{Gz}} = -\frac{6 q l^2 a}{I_{Gz}}$

au point 2 $\rightsquigarrow y = -16a \rightsquigarrow \sigma_2 = \frac{-\frac{1}{2} q l^2 (-16a)}{I_{Gz}} = \frac{8 a q l^2}{I_{Gz}}$

au point G $\rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow \sigma_G = 0$

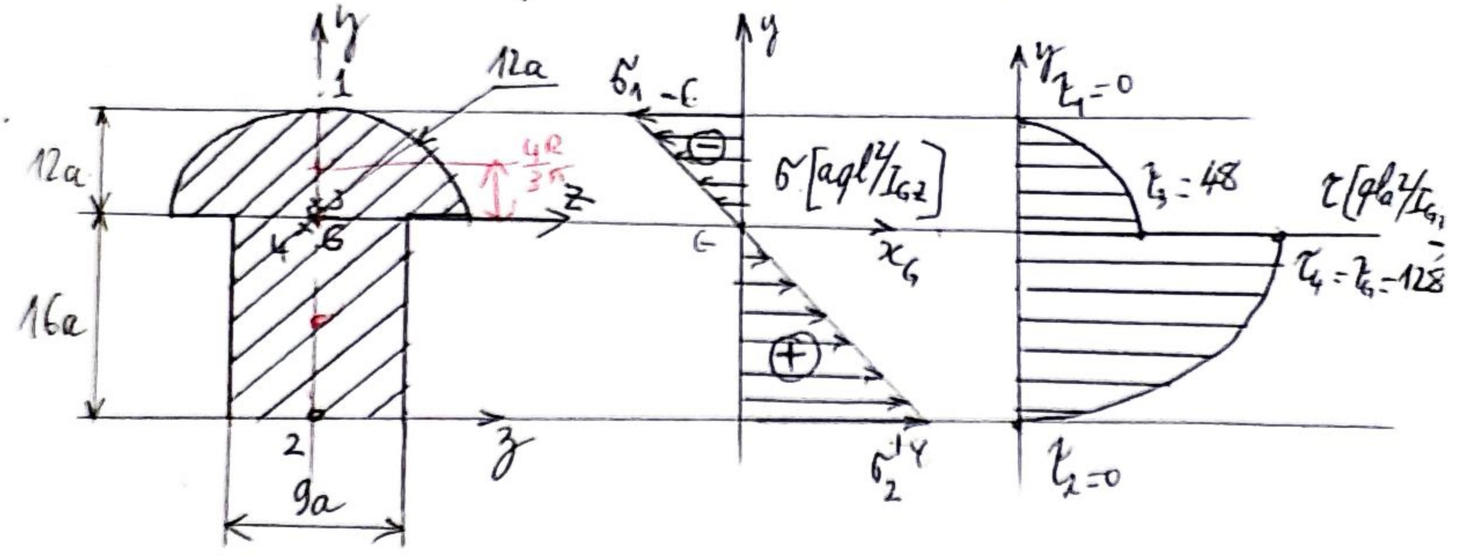
2) $$\tau = \frac{|Q_{max}| \cdot |S^{*}_{Gz}|}{I_{Gz} \cdot b_y}$$

aux points 1 et 2, $S^{*}_{z} = 0 \rightsquigarrow \tau_1 = \tau_2 = 0$

au point 3 $\rightsquigarrow S^{*}_{z_3} = (9a \cdot 16a) \cdot 8a = 1152\,a^3$

et $b_{y_3} = 24a \rightsquigarrow \tau_3 = \frac{q l \cdot 1152 a^3}{I_{Gz} \cdot 24a} = \frac{48 q l a^2}{I_{Gz}}$

au point 4 $\rightarrow S^{*}_{z_4} = S^{*}_{z_3} = 1152 a^3$ et $b_{y_4} = 9a$ $\Big\} \rightarrow \tau_4 = \frac{q l \cdot 1152 a^3}{I_{Gz} \cdot 9a} = \frac{128 q l a^2}{I_{Gz}} = \tau_G$



Ex. 2. (suite)

C) Détermination des positions des sections dans lesquelles on a :

a) Flexion pure : ($M_f \neq 0$; $Q = 0$) ⇝ Section située à $x_1 = 0$ (section C)

b) cisaillement pur : ($M_f = 0$; $Q \neq 0$) → Section située à $x_1 = l$ (Section B)

$\boxed{2}$ Pris : $a = 1cm$

a) détermination des coordonnées du centre de gravité :

Oy : axe de symétrie ⇝ $Z_G = 0$

$$y_G = \frac{\Sigma S_i . y_{Gi}}{\Sigma S_i} = \frac{8(9.16) + \left(16 + \frac{4.12}{3.\pi}\right)\left(\frac{\pi 12^2}{2}\right)}{(9.16) + \left(\frac{\pi . 12^2}{2}\right)} = 16 \text{ cm}$$

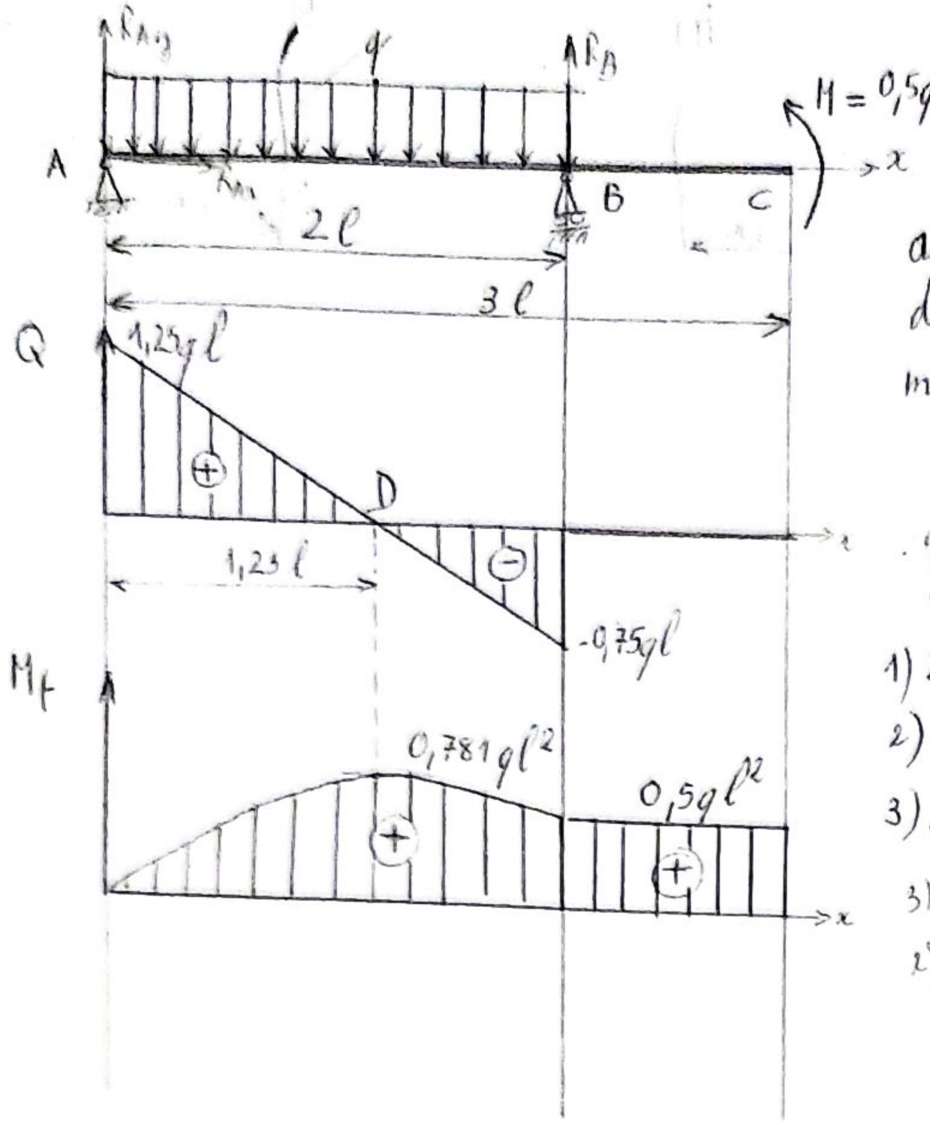
b) Calcul du moment d'inertie central principal I_{Gz} :

$$I_{Gz} = I_{1Gz} + I_{2Gz} = \left[\frac{9.16^3}{12} + 8^2.(9.16)\right] + \frac{\pi 12^4}{8} =$$

$$I_{Gz} = 20431 \text{ cm}^4$$

Ex. 3

Supposer connus $l, a, q, M = 0{,}5 q l^2$ et I_{Gz}



a) Soit à tracer les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants M_f.

Calcul des réactions aux appuis avec $Q_R = 2ql$

1) $\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow R_{Ax} = 0$

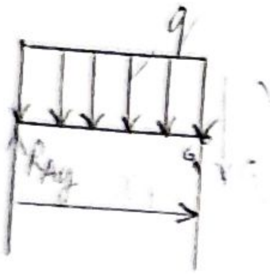
2) $\Sigma F_y = 0 = R_{Ay} + R_B - 2ql = 0$

3) $\Sigma M_B = 0 = M - R_{Ay} \cdot 2l + 2ql \cdot l = 0$

3) $\rightsquigarrow R_{Ay} = \dfrac{M + 2ql^2}{2l} = 1{,}25 q l$

2) $\rightsquigarrow R_B = 2ql - 1{,}25 ql = 0{,}75 q l$

Tronçon I $\quad 0 \leq x_1 \leq 2l$



$\Sigma F_y = 0 = R_{Ay} - q x_1 - Q_1 = 0 \rightsquigarrow Q_1 = R_{Ay} - q x_1$

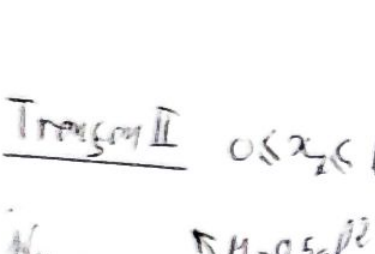
$Q_1 = 1{,}25 q l - q x_1$ — $x_1 = 0 \rightsquigarrow Q_1 = 1{,}25 q l$; $x_1 = 2l \rightsquigarrow Q_1 = -0{,}75 q l$; $Q_1 = 0$ pour $x_1 = 1{,}25 l$

$\Sigma M_{G_1} = 0 = M_{f1} - R_{Ay} \cdot x_1 + q x_1 \cdot \dfrac{x_1}{2} = 0$

$\rightsquigarrow M_{f1} = R_{Ay} \cdot x_1 - q \dfrac{x_1^2}{2}$ — pour $x_1 = 0 \rightsquigarrow M_{f1} = 0$; pour $x_1 = 2l \rightsquigarrow M_{f1} = 0{,}5 q l^2$

$M_{f1} = M_{f\max\, x_1 = 1{,}25 l} = 0{,}781 q l^2$

Tronçon II $\quad 0 \leq x_2 \leq l$



$Q_2 = 0 \quad ; \quad M_{f2} = M = 0{,}5 q l^2$

b) Soit à tracer les diagrammes des contraintes normales σ et tangentielles τ agissant dans les sections dangereuses.

Les sections dangereuses sont celles où l'on a $M_{f\,max} = 0,781\,ql^2$ et $Q_{max} = 1,25\,q$

1) $\sigma = -\dfrac{M_{f\,max}}{I_{Gz}} \cdot y$ avec $M_{f\,max} = 0,781\,ql^2$; I_{Gz} connu

au point 1 $\rightsquigarrow y = 4a \rightsquigarrow \sigma_1 = \dfrac{-0,781\,ql^2 \cdot 4a}{I_{Gz}} = \dfrac{-3,12\,aql^2}{I_{Gz}}$;

au point G $\rightarrow y = 0 \rightsquigarrow \sigma_G = 0$

au point 2 $\rightarrow y = -2a \rightsquigarrow \sigma_2 = \dfrac{-0,781\,ql^2 \cdot (-2a)}{I_{Gz}} = \dfrac{1,56\,aql^2}{I_{Gz}}$

2) $\tau = \dfrac{|Q_{max}| \cdot |S_z^*|}{I_{Gz} \cdot b_y}$ avec $Q_{max} = 1,25\,ql$

$\dfrac{6a}{6a} = \dfrac{2/3 \cdot 6a}{x}$

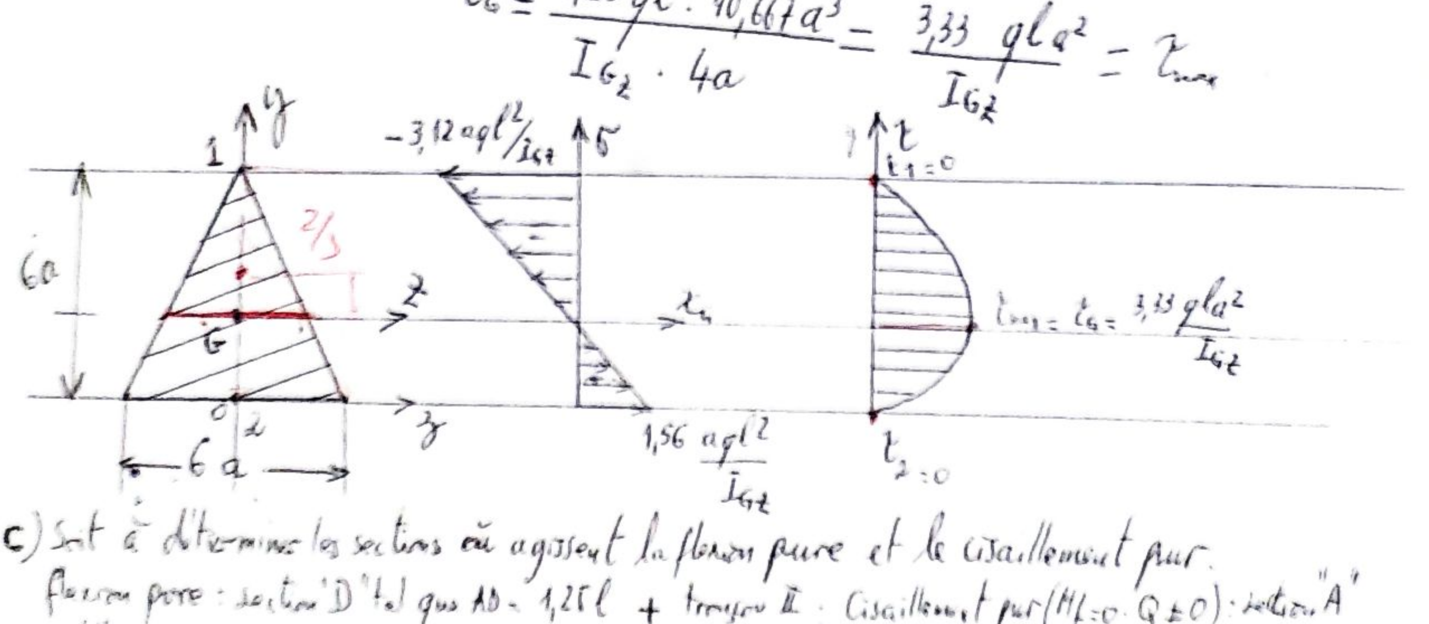
aux points 1 et 2, $S_z^* = 0 \rightsquigarrow \tau_1 = \tau_2 = 0$

$6a \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 6a \cdot 6a$

$x = 4a$.

au point G, $b_{y_G} = 4a = \left(\dfrac{\frac{2}{3}6a}{6a} \cdot 6a\right)$; $S^*_{z_G} = \left(\dfrac{4a \cdot 4a}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \cdot 4a\right) = 10,667a^3$

$\rightsquigarrow \tau_G = \dfrac{1,25\,ql \cdot 10,667\,a^3}{I_{G_z} \cdot 4a} = \dfrac{3,33\,qla^2}{I_{Gz}} = \tau_{max}$



c) Soit à déterminer les sections où agissent la flexion pure et le cisaillement pur.
flexion pure : section "D" tel que $AD = 1,25l$ + tronçon II ; Cisaillement pur ($M_f = 0$; $Q \neq 0$) : section "A"
($M_f \neq 0$; $Q = 0$)

$\boxed{2}$ Prendre $a = 1\,cm$, soit à déterminer les coordonnés de G dans le système d'axes Oyz $\quad bh^3/48$

a) Gy axe symétrie $\rightsquigarrow z_G = 0$ $y_G = \frac{1}{3} 6 = 2\,cm \rightsquigarrow G\{0; 2\,cm\}$

b) le moment d'inertie axial I_{Gz} : Gy axe de symétrie $\rightsquigarrow Gy$ axe central principal : $I_{Gy} = \dfrac{6 \cdot 6^3}{48} = 27$

$Gz \perp Gy \rightsquigarrow Gz$ axe central principal : $I_{Gz} = \dfrac{6 \cdot 6^3}{36} = 36\,cm^4$ $= \dfrac{bh^3}{36}$