04/05/2020

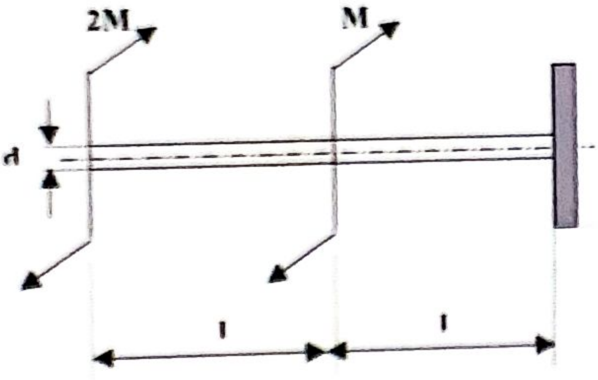
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT TCT 2ème ANNEE
Module:TEC007

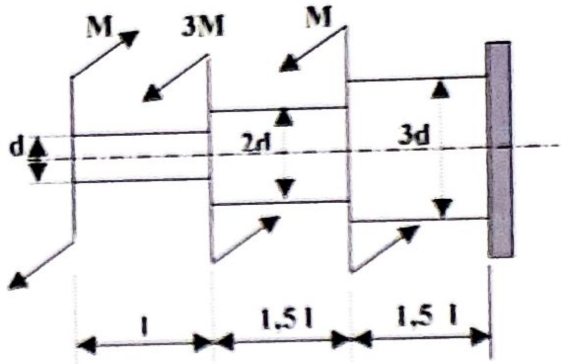
Date
Durée : 45 Min

TORSION (Système isostatique et Hyperstatique)
TD N° 7

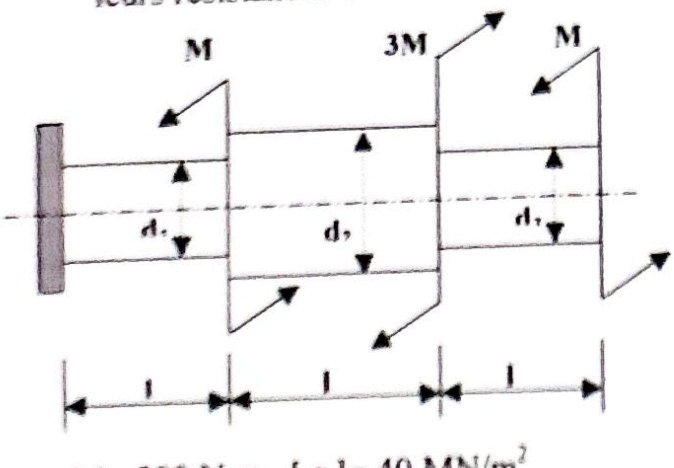
Exercice 1: Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D, de diamètre intérieur d, de longueur 1200 mm, doit transmettre une puissance de 314 KW à la vitesse de 1500 tr /min et l'angle de torsion total entre les extrémités doit être 20°. Cet arbre en acier à une résistance pratique R_P= 400 N/mm^2 ;
G= 8.10^4 N/mm2
Calculer les valeurs des diamètres D, d et faite la vérification.

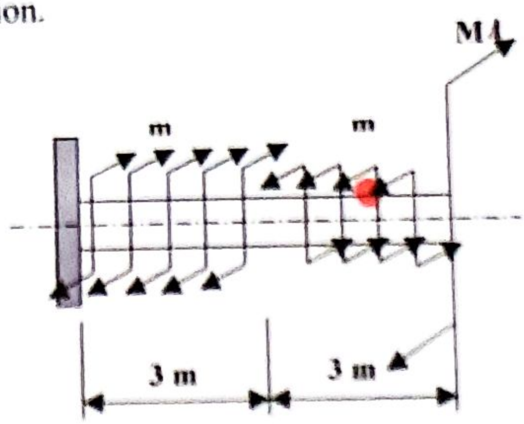
Exercice 2 : Construire les diagrammes du moment de torsion M_t, de l'angle de torsion α et déterminer la valeur de la contrainte tangentielle maximale.





Exercice 3 : Déterminer les dimensions des sections droites des barres assurant leurs résistances et calculer leurs angles de torsion.



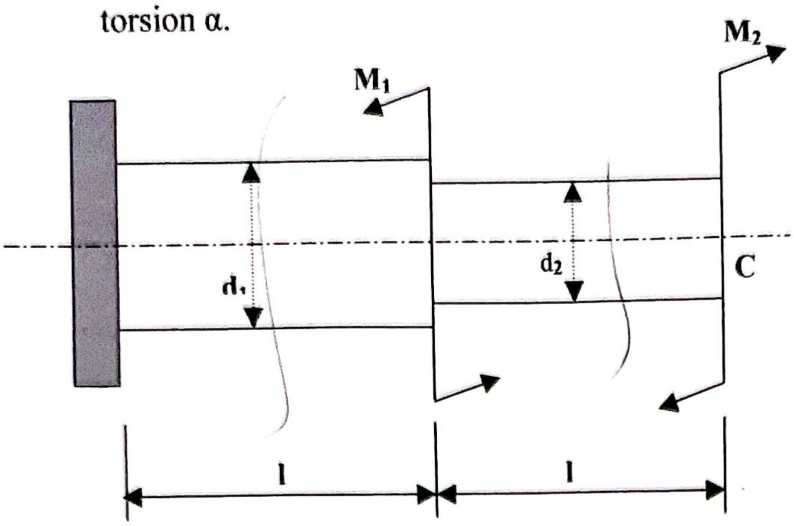


M= 200 N.m , [τ]= 40 MN/m^2
G = 8.10^4 MN/m^2

m = 4 daN/m , M_1= 5 daN .m
[τ] = 250 daN/cm^2.
G= 8.10^5 daN/cm^2

Exercice 4 :

- Déterminer la valeur de M_1 pour que l'angle de torsion a l'extrémité C doit être égal a ($\alpha = 2°$).
- Construire les diagrammes du moment de torsion M_t et de l'angle de torsion α.

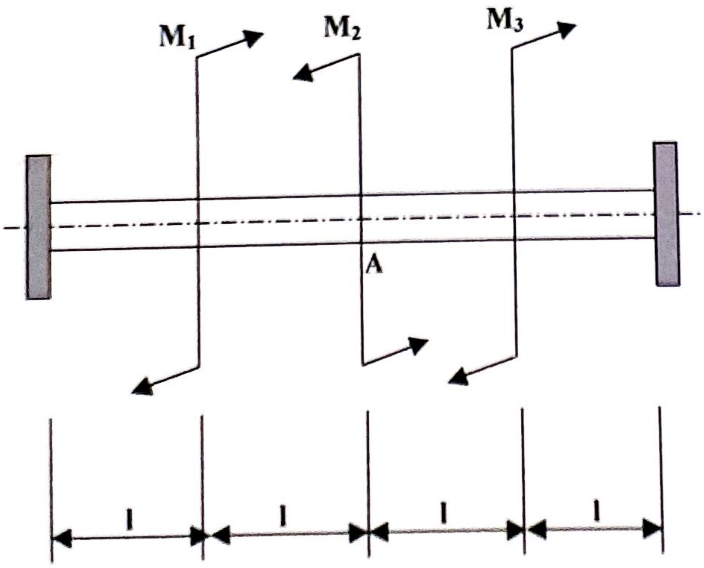


Données : $M_2 = 50$ N.m
$d = 12$ mm , $G = 30.10^9$ N / m^2
$l = 200$ mm , $d_1 = 1,2\ d$
$d_2 = d$

Exercice 5 :

- Calculer le diamètre d et construire le diagramme de l'angle de déformation α.
- Déterminer la valeur de α au niveau de la section A.

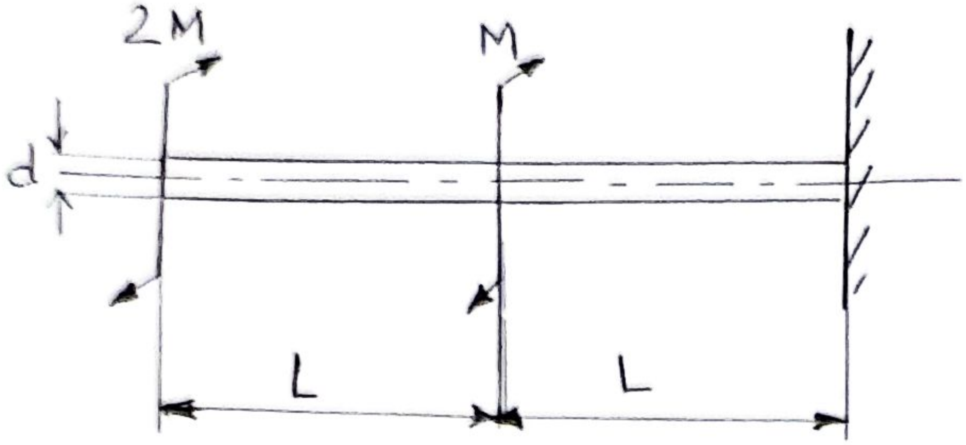
Données : $M_1 = 20$ daN.m , $M_2 = 40$ daN.m
$M_3 = 100$daN..m , $G = 8.10^5$ daN/cm^2
[τ] = 500 daN/cm^2 , $l = 0,8$ m



Le chargé de cours : L. Kherredine

Solution de l'exercice N° 2 de la serie de Torsion.

- construire les diagrammes du moment de torsion M_t et de l'angle de torsion α et determiner la valeur de la contrainte tangentielle maximale.



1e Etape

Avant de commencer l'exercice nous devons connaitre la convention de signe.

Le moment de torsion est positif, si l'observateur regardant de l'extrémité de la barre voit les moments tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

2e Etape

on doit utiliser la methode des sections comme nous avons fait dans le chapitre de la traction compression en faisant une section (A-A) il apparait un moment de torsion comme suit voir figure suivante fig 1

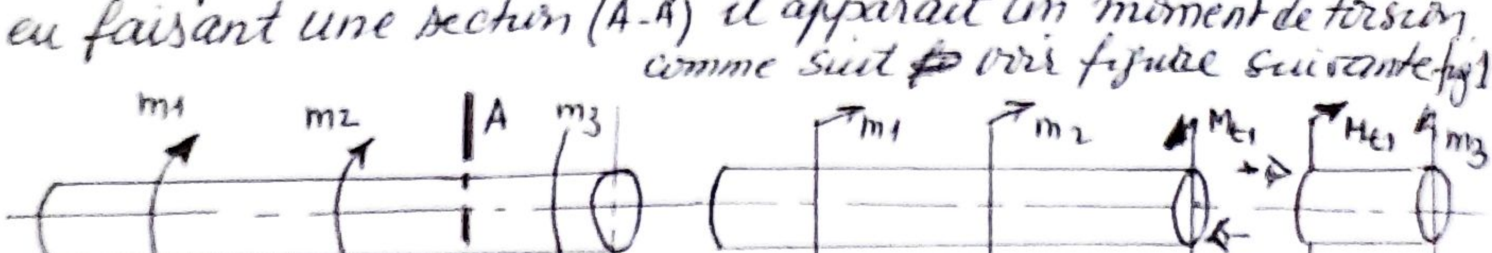


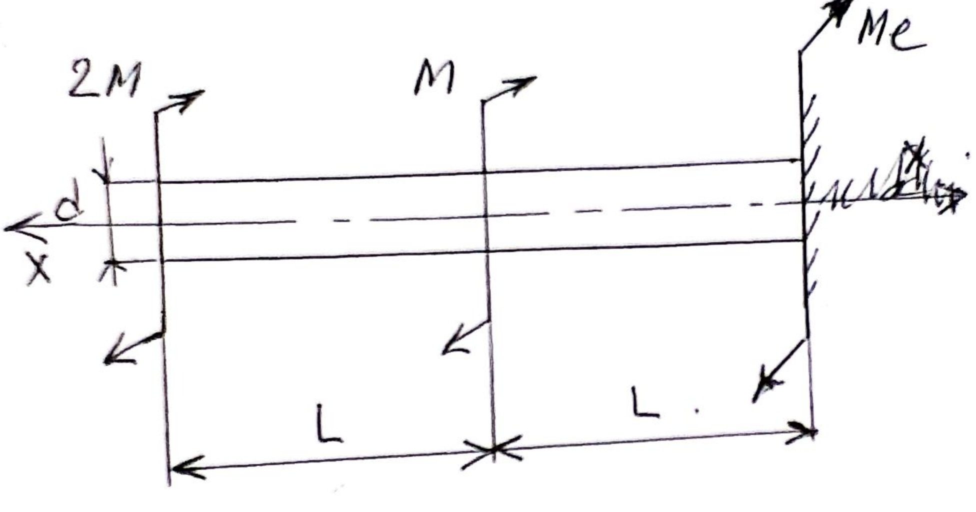
fig 1

Dès que vous faite la section (tronçon) vous devez representer les moments de torsion M_t dans le sens que j'ai présenté sur la fig(1). on doit pas changer de sens (Convention de signe).

<u>maintenant on commence la résolution de l'exercice.</u>

dans cet exercice nous avons un encastrement donc il apparait un moment d'encastrement qu'on nomme Me. et on suite on écrit l'équation d'équilibre.

<u>Equation d'equilibre des moments de torsion</u>

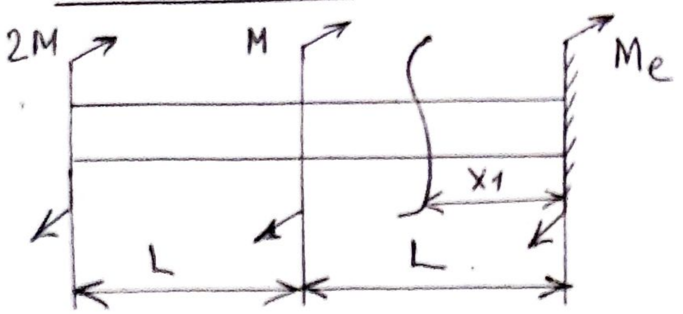


Le sens de Me est choisi au hasard.

$$\Sigma M/x = 0 \Rightarrow -2M - M - Me = 0$$

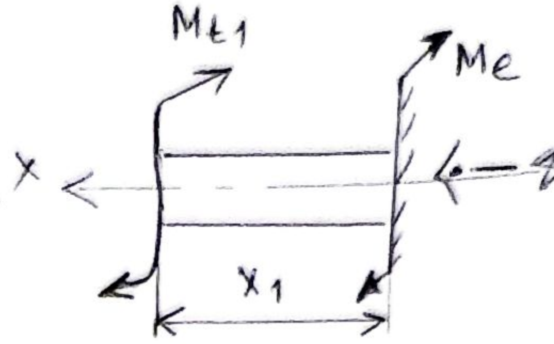
$$Me = -3M$$

<u>Tronçon I</u> $0 \leq x_1 \leq L$



lorsqu'on nous demande de calculer l'angle de torsion α on doit toujours commencer du coté de l'encastrement car on sait que α est nul à l'encastrement.

$\sum M/x = 0 \Rightarrow -Me - Mt_1 = 0$



$Mt_1 = -Me = 3M$

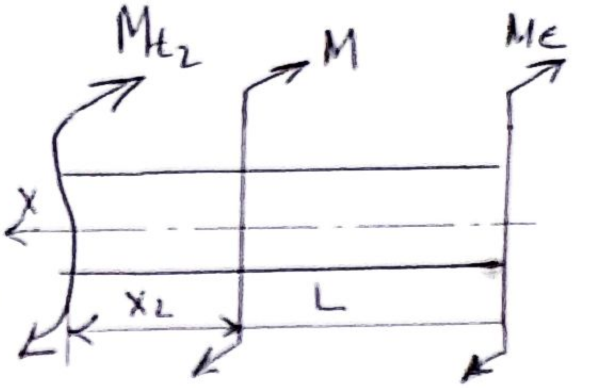
Angle de Torsion

$$\alpha_1 = \int_0^L \frac{Mt_1\, dx_1}{GI_0} = \frac{3M \cancel{d}x_1}{GI_0}\Bigg|_0^L$$

pour $x_1 = 0 \qquad \alpha_1 = 0$

$x_1 = L \qquad \alpha_1 = \dfrac{3ML}{GI_0}.$

Tronçon II $\qquad 0 \leq x_2 \leq L.$



$\sum M/x = 0 \Rightarrow -Me - M - Mt_2 = 0$

$Mt_2 = -Me - M = 3M - M = 2M$

$Mt_2 = 2M.$

$$\alpha_2 = \int_0^L \frac{Mt_2\, dx_2}{GI_0} = \int_0^L \frac{2M dx_2}{GI_0} = \frac{2MX_2}{GI_0}\Bigg|_0^L$$

pour $x_2 = 0 \qquad \alpha_2 = 0$

$x_2 = L \qquad \alpha_2 = \dfrac{2ML}{GI_0}.$

angle de torsion totale à l'extremité est égale :

$$\alpha_{total} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3ML}{GI_0} + \frac{2ML}{GI_0} = \frac{5ML}{GI_0}.$$

La contrainte tangentielle maximale est :

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p}.$$

W_p : module de résistance de torsion de la section

pour une section pleine $W_p = \frac{\pi D^3}{16} \simeq 0{,}2\,D^3$.

pour une section annulaire (arbre creux).

$$W_p = 0{,}2\,D^3\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

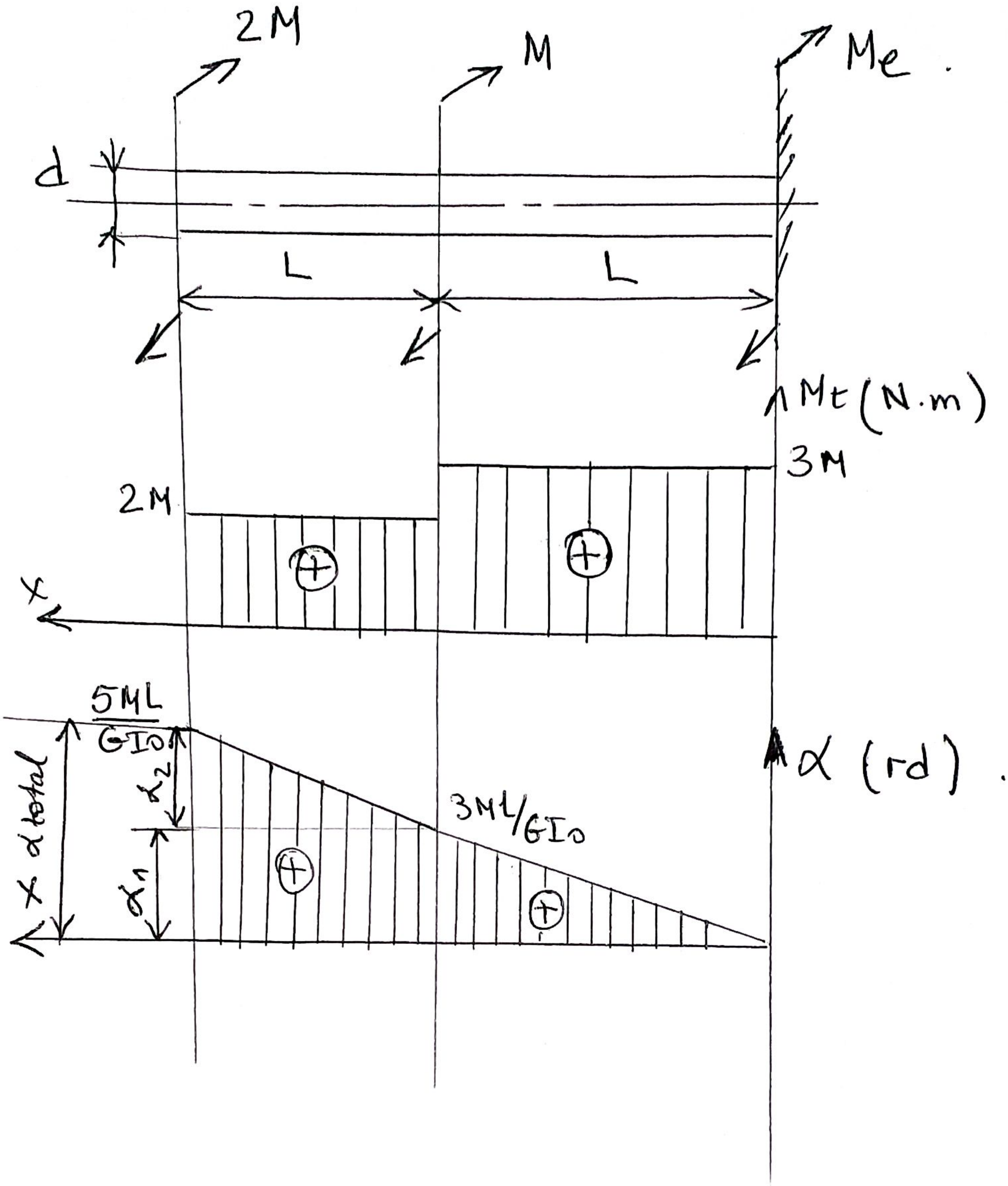
$$W_p = \frac{I_p}{D/2}$$ I_p : moment d'inertie polaire

I_p : d'un cercle est égale à $\frac{\pi D^4}{32}$.

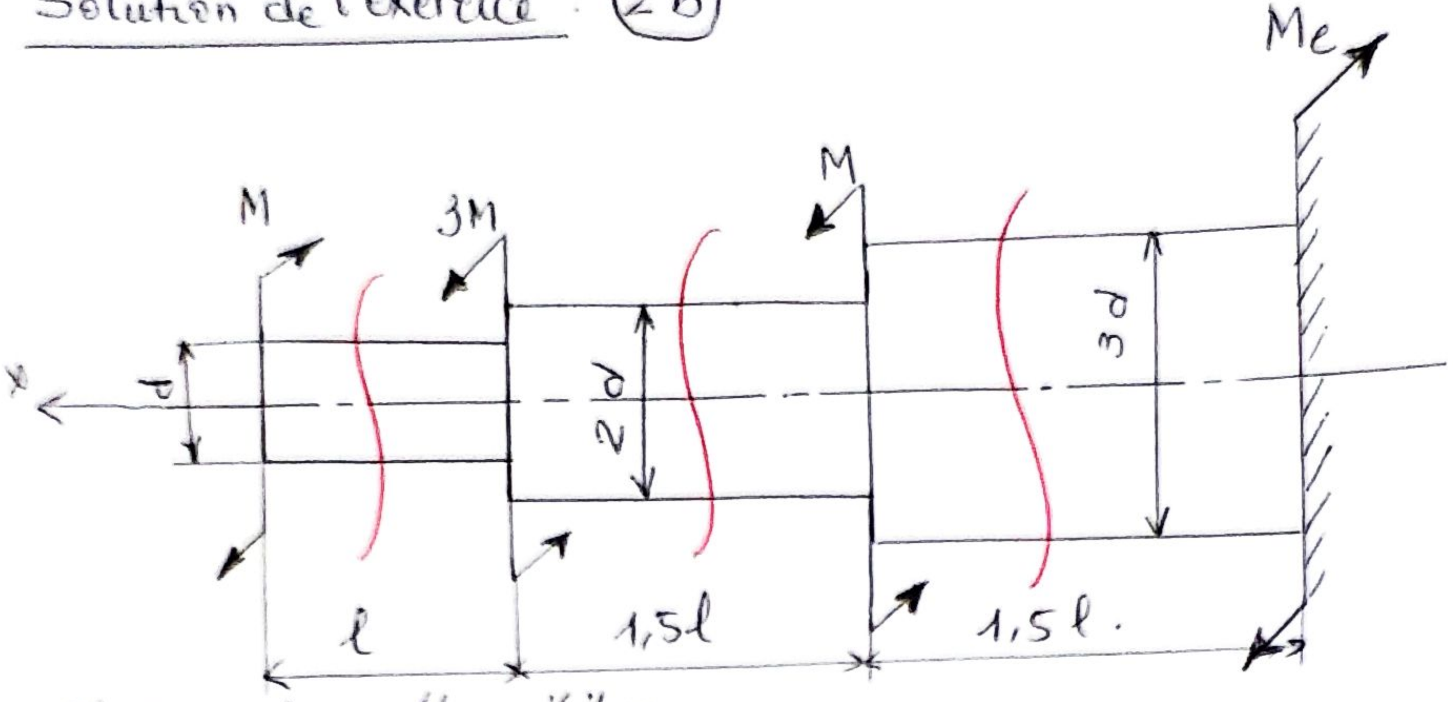
$$W_p = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

ce qui nous donne

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{3M \cdot 16}{\pi D^3}$$


2M
M
Me
d
L
L
Mt (N.m)
3M
2M
x
5ML/GIo
3ML/GIo
α (rd)
α2
α1
α total

Solution de l'exercice (2b)

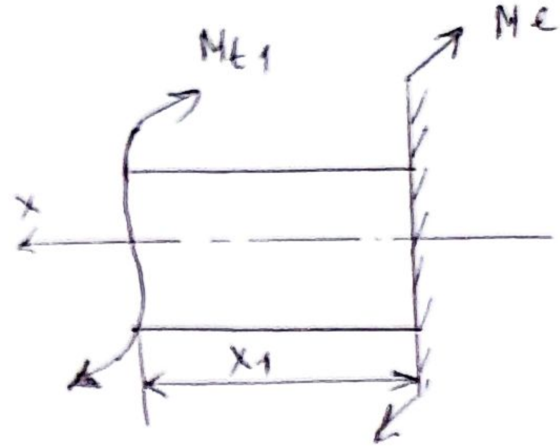


1) Equation d'équilibre

$\sum M/x = 0 \Rightarrow -Me + M + 3M - M = 0$.

$Me = 3M$.

Tronçon I $\quad 0 \leq x_1 \leq 1{,}5l$.



$\sum M/x = 0 \Rightarrow -M_{t1} - Me = 0$.

$M_{t1} = -Me = -3M$.

$$\alpha_1 = \int_0^{1{,}5l} \frac{M_{t1}\,dx_1}{G I_{03}} = \left. \frac{-3M X_1}{G I_{03}} \right|_0^{1{,}5l}.$$

Remarque:

on sait que l'angle $\alpha = 0$ à l'encastrement, c'est pour ça on commence à droite c'est-à-dire à l'encastrement.
Nous avons aussi le moment d'Inertie I_0 n'est pas constant tout le long de la barre.

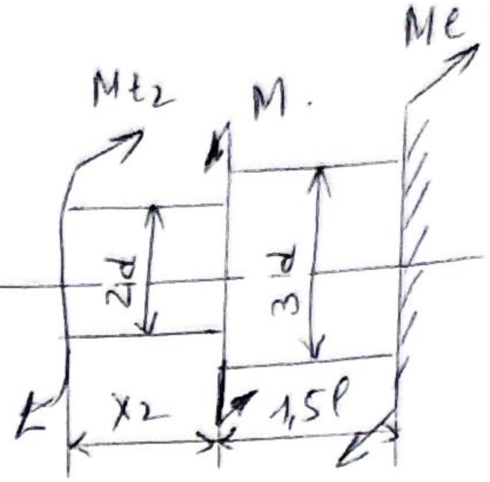
$I_0 = \dfrac{\pi d^4}{32}$. $\qquad I_{02} = \dfrac{\pi (2d)^4}{32} = \dfrac{16\pi d^4}{32} = 16 I_0$

$I_{01} = \dfrac{\pi d^4}{32} = I_0$. $\qquad I_{03} = \dfrac{\pi (3d)^4}{32} = 81\dfrac{\pi d^4}{3} = 81 I_0$

pour $X_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

$$X_1 = 1{,}5\,l \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4{,}5\,Ml}{G\underbrace{I_{03}}_{81''I_0}} = \frac{-4{,}5\,Ml}{G\,81\,I_0} = -\frac{0{,}055\,Ml}{GI_0}$$

Tronçon II $\quad 0 \leq X_2 \leq 1{,}5\,l$.



$$\Sigma M/x = 0 \Rightarrow -Me + M - M_{t_2} = 0$$

$$M_{t_2} = -Me + M = -3M + M = -2M$$

$$M_{t_2} = -2M$$

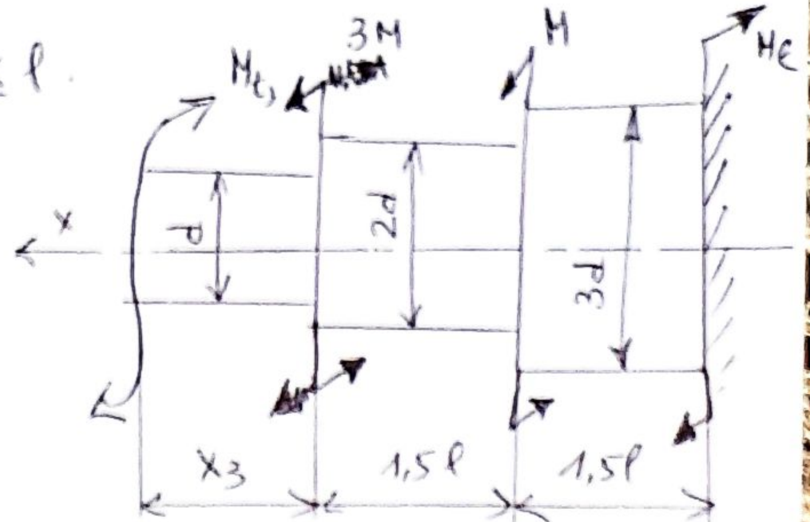
$$\alpha_2 = \int_0^{1{,}5l} \frac{M_{t_2}\,dx_2}{GI_{02}} = -\frac{2Mx}{GI_{0_2}}\Bigg|_0^{1{,}5l}$$

$$X_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$X_2 = 1{,}5\,l \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{3Ml}{G\underbrace{I_{02}}_{16''I_0}} = -\frac{3Ml}{16\,GI_0} = -\frac{0{,}1875\,Ml}{GI_0}$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{0{,}055\,Ml}{GI_0} - \frac{0{,}1875\,Ml}{GI_0} = -\frac{0{,}242\,Ml}{GI_0}$$

Tronçon III $\quad 0 \leq X_3 \leq l$



$\Sigma M/x = 0 \Rightarrow$

$$-Me + M + 3M - M_{t_3} = 0 \Rightarrow$$

$$M_{t_3} = -Me + M + 3M$$

$$M_{t_3} = -3M + M + 3M =$$

$$M_{t_3} = M$$

$$\alpha_3 = \int_0^l \frac{M_{t3}\,dx_3}{GI_{0_1}} = \frac{Mx}{GI_0}\Big|_0^l$$

pour $X_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$$x_3 = l \Rightarrow \alpha_3 = \frac{Ml}{GI_{0_1}} = \frac{Ml}{GI_0}$$

I_0''

$$\alpha_{1,2,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_3 = -\frac{0{,}242\,Ml}{GI_0} + \frac{Ml}{GI_0} = \frac{0{,}758\,Ml}{GI_0}.$$

La contrainte maximale tangentielle se trouve sur le tronçon I. car $M_{t_1} = -3M$. on ne tient pas compte du signe (le signe indique que le sens du moment)

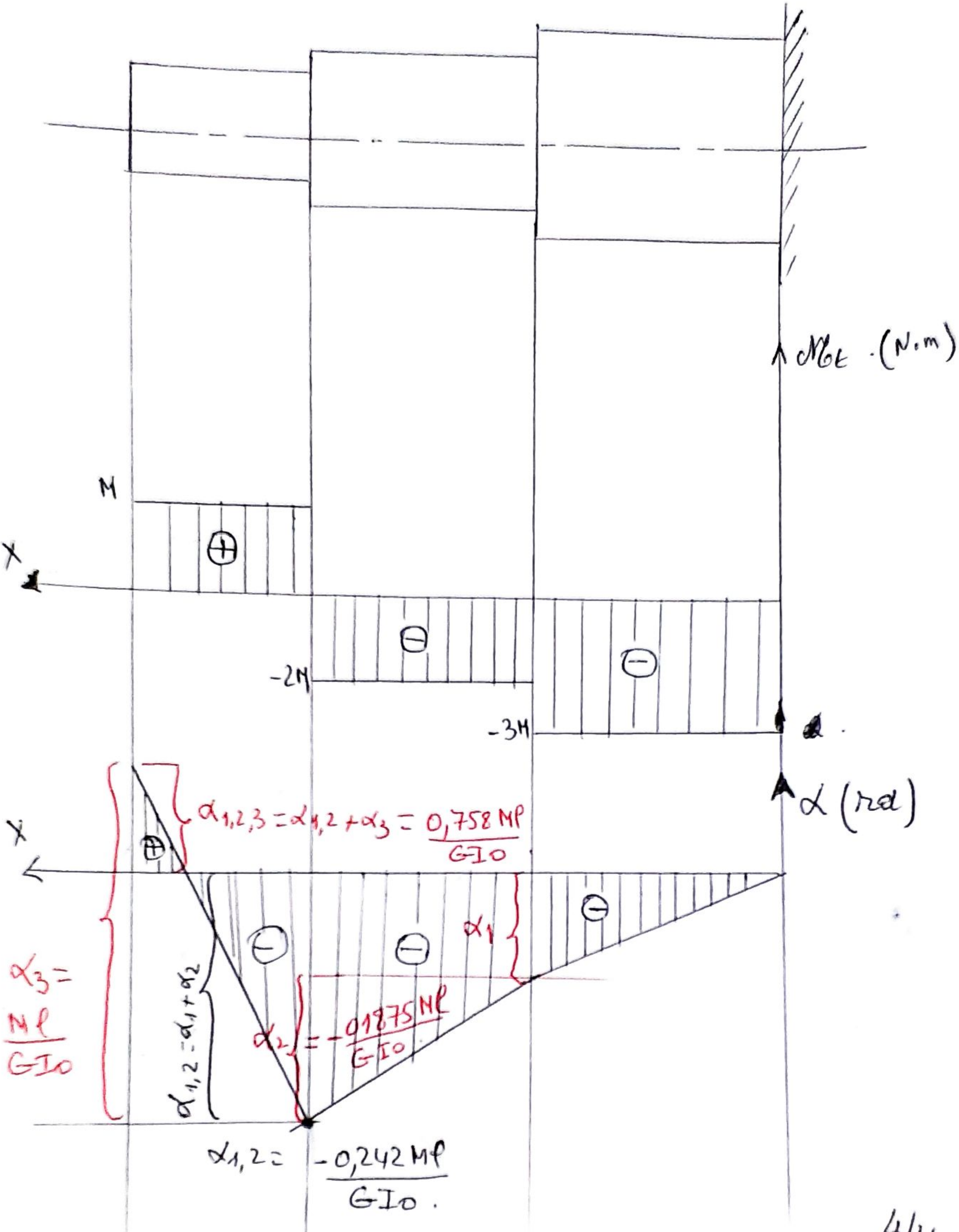
$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{W_p}. \qquad \text{ici } M_{tmax} = -3M.$$

W_p du tronçon sur lequel se trouve le moment de torsion maximal. ($M_{t\,max}$) ici est le tronçon I. donc $W_{p_1} = \dfrac{I_{03}}{\frac{3d}{2}} = \dfrac{\frac{\pi 81 d^4}{32}}{\frac{3d}{2}} =$.

$$W_{p1} = \frac{\pi 27 d^3}{16}.$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{tmax}}{W_{p1}} = \frac{-3M}{\frac{\pi 27 d^3}{16}} = \frac{-48M}{27\pi d^3}.$$

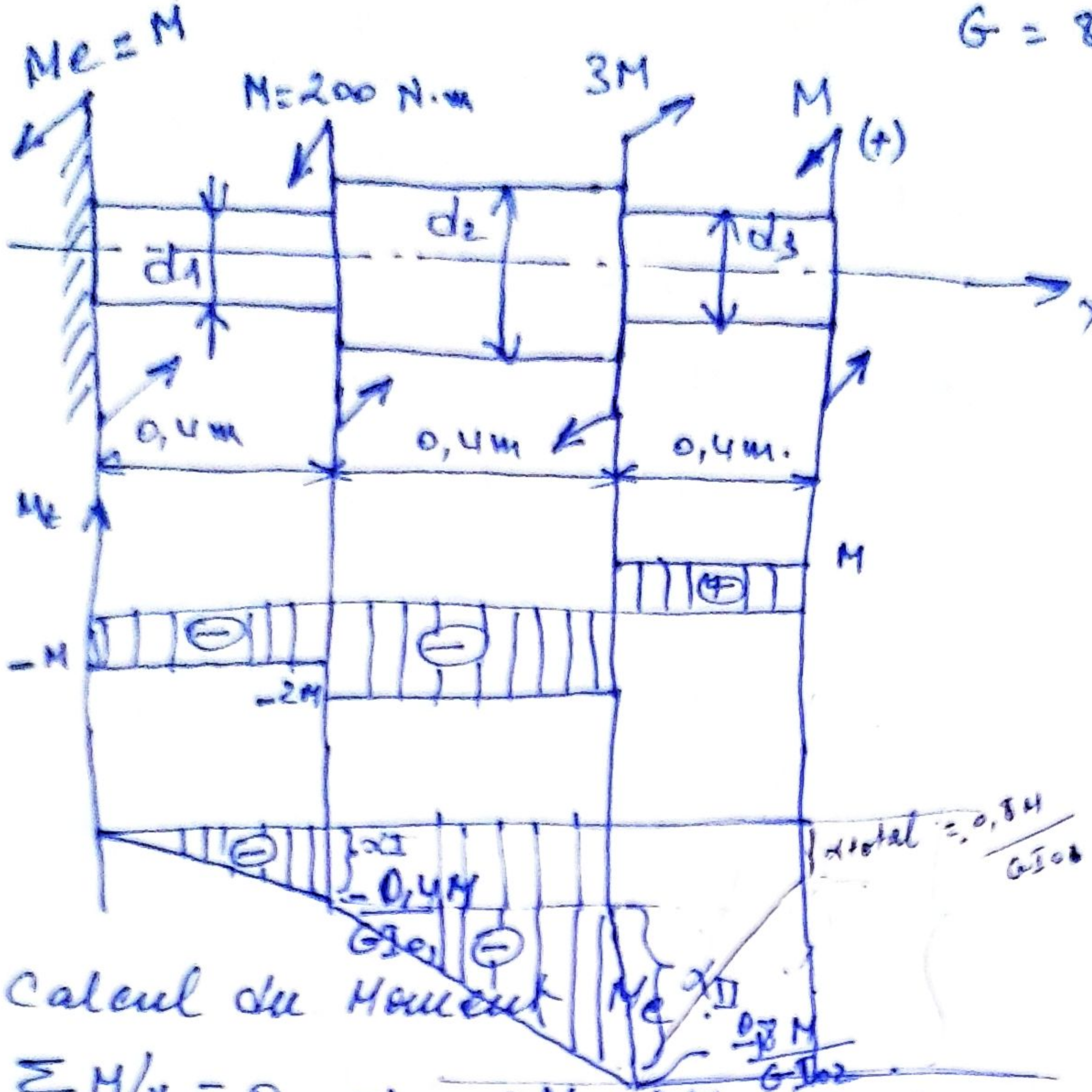
Construction des diagrammes.



Exercice N° 3.

$[\sigma] = 40 \, MN/m^2$

$G = 8 \cdot 10^4 \cdot MN/m^2$.

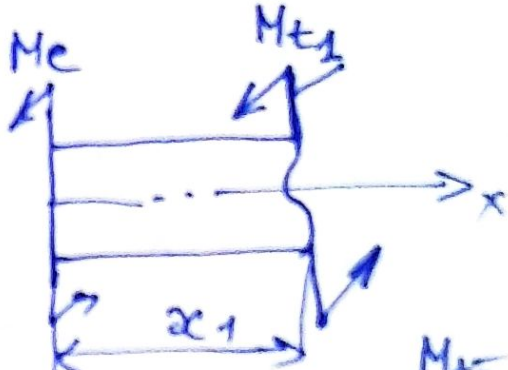


Calcul du Moment

$\Sigma M/x = 0 \Rightarrow +M - 3M + M + M_e = 0 \Rightarrow$

$M_e = 3M - 2M = M$.

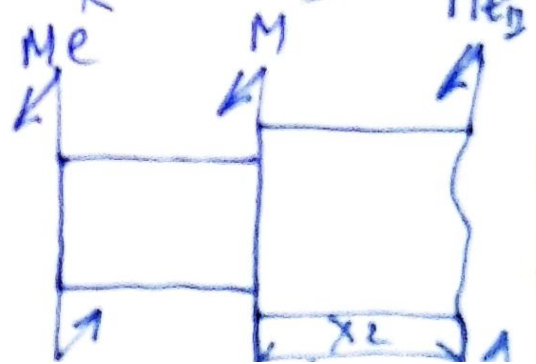
Tronçon I $\quad 0 \leq X_1 \leq 0,4$



$\Sigma M/x \quad M_{t1} + M_e = 0 \Rightarrow$

$M_{t1} = -M_e = -M$

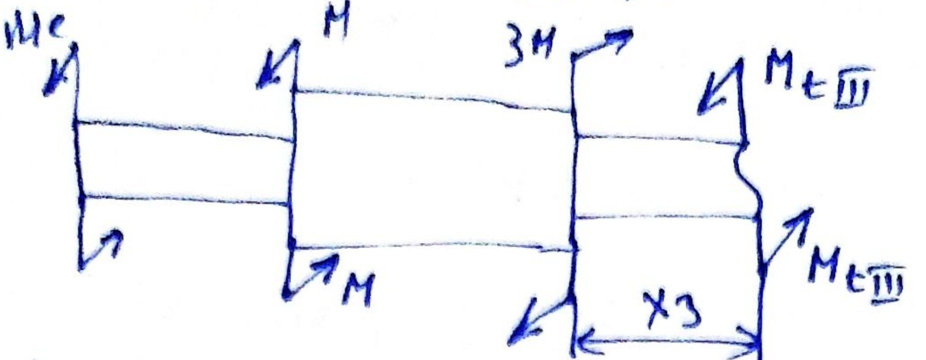
Tronçon II $\quad 0 \leq X_2 \leq 0,4$



$\Sigma M/x = M_{tII} + M + M_e = 0$.

$M_{tII} = -2M$.

Tronçon III $0 \leq x_3 \leq 0,4$ ②



$\sum M/x = 0 \Rightarrow M_{t III} - 3M + M + M_e = 0 \Rightarrow$

$M_{t III} = 3M - M - M_e = M.$

calcul des dimensions.

$\tau_{max} = \dfrac{Mt_{max}}{Wp} \leq [\tau]$.

~~Wp~~ calcul de d1.

$Wp_I \geq \dfrac{Mt_I max}{[\tau]}$ $Wp_I = \dfrac{\pi d_1^3}{16} \geq \dfrac{Mt_1 max}{[\tau]}$

$\Rightarrow d_1 \geq \sqrt[3]{\dfrac{16\, Mt_1 max}{\pi\,[\tau]}} \geq \sqrt[3]{\dfrac{16\,|-200|}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6}} \geq 2,942 \cdot 10^{-2}$ m

$d_1 \geq 29,4$ mm. on choisit $d_1 = 30$ mm.

Calcul de d_2

$Wp_{II} \geq \dfrac{Mt_{II} max}{[\tau]}$ $Wp_{II} = \dfrac{\pi d_{II}^3}{16} \geq \dfrac{Mt_{II} max}{[\tau]}$

$\Rightarrow d_{II} \geq \sqrt[3]{\dfrac{16\, Mt_{II} max}{\pi\,[\tau]}} \geq \sqrt{\dfrac{16 \cdot |-400|}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6}}$

$d_2 \geq 37,06$ mm on choisit $d_2 = 38$ mm.

calcul de d_3

$W_{p_{III}} \geq \frac{Mt_{III}\,max}{[\tau]}$ comme $|Mt_{III}\,max| = |Mt_{I}\,max|$

$\Rightarrow d_1 = d_2 = 29{,}4$ mm on choisit $d_3 = 30$ mm

calcul des angles de torsions.

$$\alpha_I = \int_0^{0,4} \frac{Mt_1\,dx_1}{GI_{o1}} = \frac{1}{GI_{o1}} \int_0^{0,4} -M\,dx_1 = \frac{-1}{GI_{o1}} M X_1 \Big|_0^{0,4}$$

pour $x_1 = 0 \Rightarrow \alpha_I = 0$.

$x_1 = 0{,}4\,m \Rightarrow \alpha_I = \frac{-1}{GI_{o1}} 0{,}4\,M$.

$$\alpha_{II} = \frac{1}{GI_{o2}} \int_0^{0,4} Mt_{II}\,dx_2 = -\frac{1}{GI_{o2}} 2 M X_2 \Big|_0^{0,4}$$

pour $X_2 = 0 \Rightarrow \alpha_{II} = 0$.

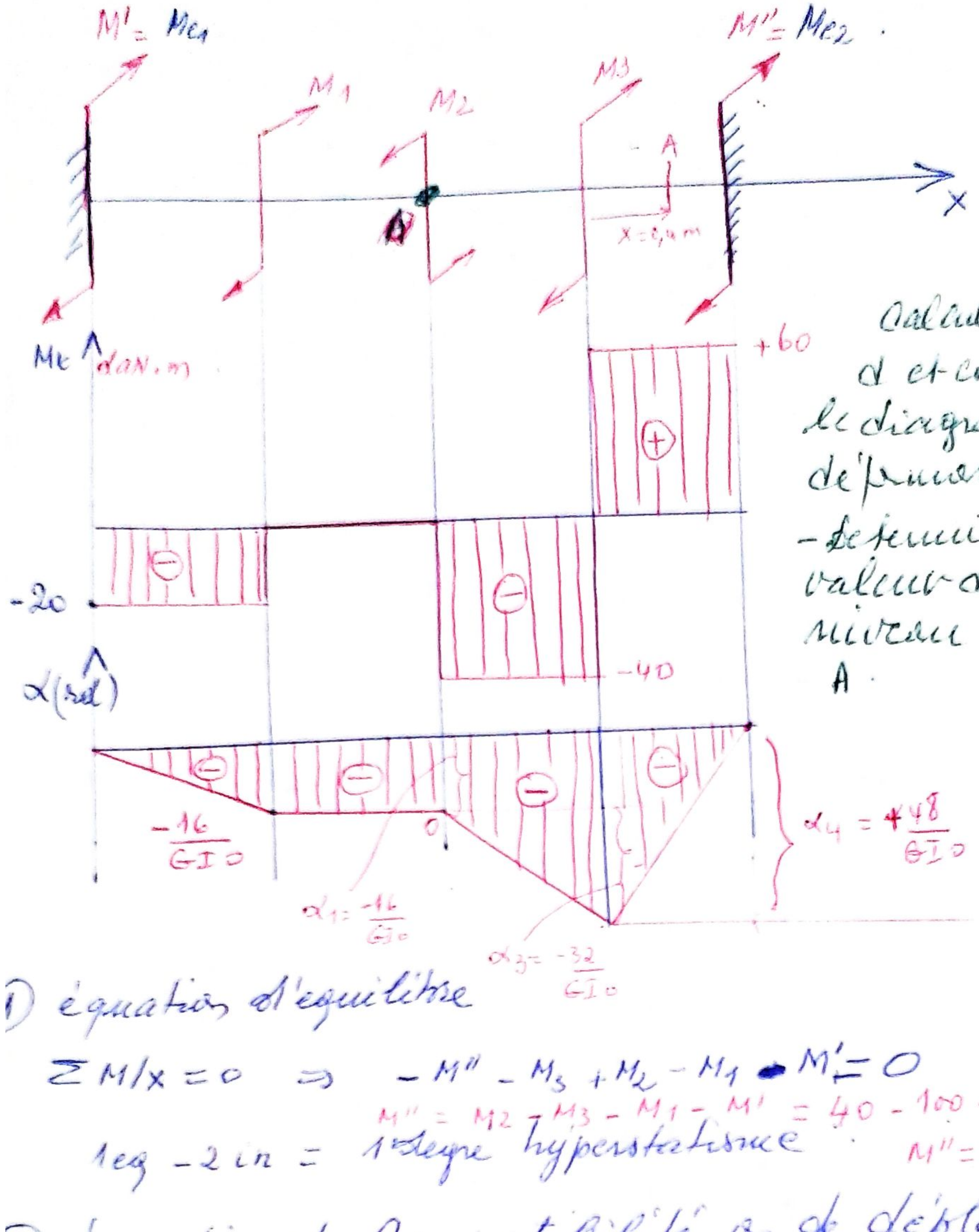
$X_2 = 0{,}4 \Rightarrow \alpha_{II} = \frac{-0{,}8\,M}{GI_{o2}}$.

$$\alpha_{III} = +\frac{1}{GI_{o3}} \int_0^{0,4} Mt_{III}\,dx_3 = \frac{1}{GI_{o3}} M X_3 \Big|_0^{0,4}$$

pour $X_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{III} = 0$

$X_3 = 0{,}4 \Rightarrow \alpha_{III} = \frac{0{,}4\,M}{GI_{o3}}$.

$\alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III} = \alpha_{total}$. $\alpha_{tot} > 0$



Calculer le diam d et construire le diagramme de déformation α
- Déterminer la valeur de α au niveau de la section A.

1) équation d'équilibre

$$\Sigma M/x = 0 \Rightarrow -M'' - M_3 + M_2 - M_1 - M' = 0 \quad (1)$$

$M'' = M_2 - M_3 - M_1 - M' = 40 - 100 - 20 - (-20)$

$M'' = -60$

1 eq - 2 in = 1 degré hyperstatisme

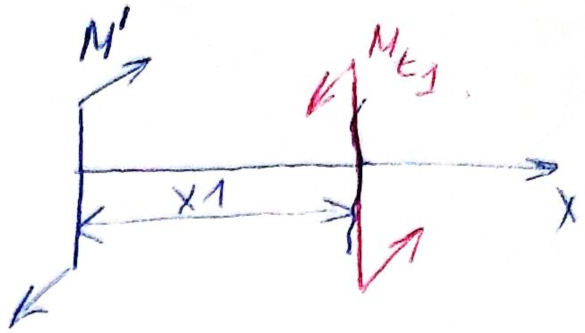
2) équation de Compatibilité ou de déplacement Angulaire ou déformation angulaire.

$$\alpha_{total} = \sum_{i=1}^{n=4} \alpha_i = 0 \quad (2)$$

données : $M_1 = 20$ daN.m
$M_2 = 40$ daN.m
$M_3 = 100$ daN.m

$G = 8.10^5$ daN/cm²
$[\tau] = 500$ daN/cm²
$l = 0,8$ m

Tronçon I $\quad 0 \leq x_1 \leq 0,8m$



$\Sigma M/x_I = 0 = M_{t_1} - M' = 0$

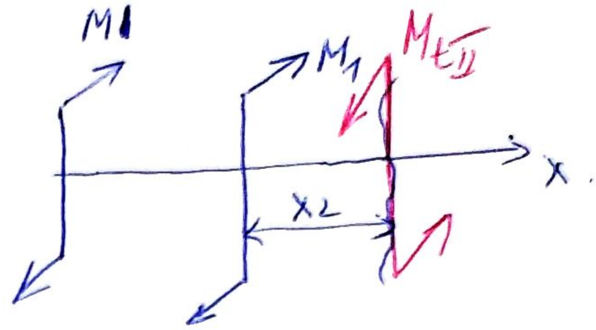
$M_{t_1} = M' = -20\, daN.m$

$$\alpha_1 = \int_0^{0,8} \frac{M_{t_1} dx_1}{GI_0} = \frac{M' x_1}{GI_0}\Big|_0^{0,8}$$

pour $x_1 = 0 \qquad \alpha_1 = 0$

$x_1 = 0,8 \qquad \alpha_1 = \frac{0,8\, M'}{GI_0} = \frac{0,8 \cdot (-20)}{GI_0} = \frac{-16}{GI_0}$

Tronçon II $\quad 0 \leq x_2 \leq 0,8$



$\Sigma M/x = 0 = M_{t_{II}} - M_1 - M' = 0$

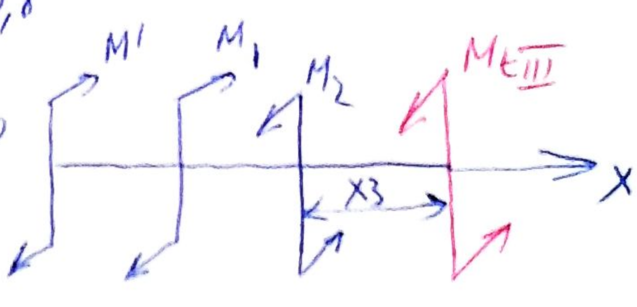
$M_{t_{II}} = M_1 + M' = 20 - 20 = 0$

$$\alpha_2 = \int_0^{0,8} \frac{(M_1 + M')dx_2}{GI_0} = \frac{(M_1 + M')x_2}{GI_0}\Big|_0^{0,8}$$

pour $x_2 = 0 \qquad \alpha_2 = 0$

$x_2 = 0,8 \qquad \alpha_2 = \frac{(M_1 + M')0,8}{GI_0} = \frac{(20-20)0,8}{GI_0} = 0$

Tronçon III $\quad 0 \leq x_3 \leq 0,8$



$\Sigma M/x = 0 = M_{t_{III}} + M_2 - M_1 - M' = 0$

$M_{t_{III}} = M_1 + M' - M_2$

$M_{t_{III}} = 20 - 20 - 40 = -40\, daN.m$

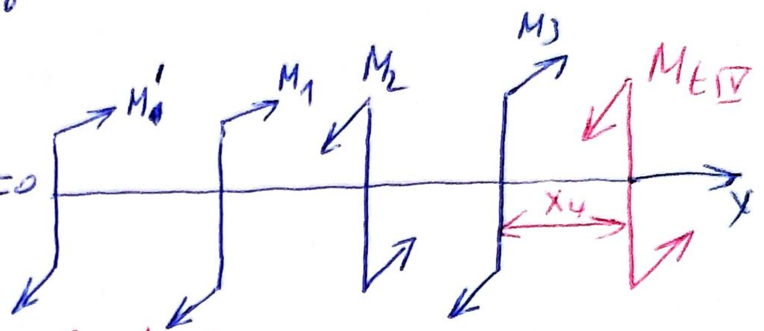
$$\alpha_3 = \int_0^{0,8} \frac{M_{t_{III}}\, dx_3}{GI_0} = \int_0^{0,8} \frac{(M_1 + M' - M_2)\, dx_3}{GI_0} = \frac{(M_1 + M' - M_2) X_2}{GI_0}\Bigg|_0^{0,8}$$

pour $X_3 = 0$ $\qquad \alpha_3 = 0$.

$X_3 = 0,8 \qquad \alpha_3 = \dfrac{(M_1 + M' - M_2)\, 0,8}{GI_0} = \dfrac{(\cancel{20} - \cancel{20} - 40)\, 0,8}{GI_0}$

$\alpha_3 = \dfrac{-32}{GI_0}$.

Tronçon $\underline{IV}$ $\quad 0 \leq x_4 \leq 0,8$



$\Sigma M/x = 0 \quad M_{t_{IV}} - M_3 + M_2 - M_1 - M' = 0$

$M_{t_{IV}} = M_3 - M_2 + M_1 + M'$

$M_{t_{IV}} = 100 - 40 + 20 - 20 = 60$ daN.m.

$$\alpha_4 = \int_0^{0,8} \frac{M_{t_{IV}}\, dx_4}{GI_0} = \int_0^{0,8} \frac{(M_3 - M_2 + M_1 + M')\, dx_4}{GI_0} =$$

$$= \frac{(M_3 - M_2 + M_1 + M') X_4}{GI_0}\Bigg|_0^{0,8}$$

pour $X_4 = 0 \qquad \alpha_4 = 0$.

$X_4 = 0,8 \qquad \alpha_4 = \dfrac{(M_3 - M_2 + M_1 + M')\, 0,8}{GI_0}$

Revenons à l'equation (2) $\qquad \alpha_4 = \dfrac{(100 - 40 + \cancel{20} - \cancel{20})\, 0,8}{GI_0}$

$\alpha_4 = \dfrac{48}{GI_0}$

$$\sum_{i=1}^{n=4} \alpha_i = 0 = \frac{0,8\, M'}{GI_0} + \frac{(M' + M_1)\, 0,8}{GI_0} + \frac{(M' + M_1 - M_2)\, 0,8}{GI_0}$$

$$+ \frac{(M' + M_1 - M_2 + M_3)\, 0,8}{GI_0} = 0.$$

$$M' + M' + M_1 + M' + M_1 - M_2 + M' + M_1 - M_2 + M_3 = 0$$

$$4M' + 3M_1 - 2M_2 + M_3 = 0$$

$$M' = \frac{2M_2 - 3M_1 - M_3}{4} = \frac{2.40 - 3.20 - 100}{4}$$

$$M' = \frac{80 - 60 - 100}{4} = -\frac{80}{4} = \boxed{-20 \text{ daN.m}}$$

Déterminez α_A.

$$\alpha_A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \int_0^{0,4} \left(\frac{M_{IV}}{GI_0}\right) dx_4$$

$$\alpha_A = -\frac{16}{GI_0} + 0 - \frac{32}{GI_0} + \frac{(M_3 - M_2 + M_1 + M')\,x_4}{GI_0}\Bigg|_0^{0,4}$$

pour $x_4 = 0,4$ $\quad \alpha_4 = \frac{(100 - 40 + \cancel{20} - \cancel{20})0,4}{GI_0} = 24/GI_0$

$$\alpha_A = -\frac{16}{GI_0} + 0 - \frac{32}{GI_0} + \frac{24}{GI_0} = \frac{-24}{GI_0}$$

autre méthode.

$$\alpha_A = \int_0^{0,4} \frac{-M'' dx}{GI_0} = -\frac{M'' x}{GI_0}\Bigg|_0^{0,4} = \frac{-(-60)x\big|_0^{0,4}}{GI_0}$$

$$\alpha_A = \frac{60x}{GI_0}\Bigg|_0^{0,4}$$

pour $X = 0$ $\quad \alpha_A = 0$

$X = 0,4$ $\quad \alpha_A = -\frac{24}{GI_0}$

Exercice 1 : Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D, de diamètre intérieur d, de longueur 1200 mm, doit transmettre une puissance $P = 314$ KW à la vitesse de rotation $n = 1500$ tr /min et l'angle de torsion total entre les extrémités doit être 20°. Cet arbre en acier à une résistance pratique $R_p = 400\ N/mm^2$; $G = 8.10^4\ N/mm^2$

- Calculer les valeurs des diamètres D, d et faite la vérification.

La contrainte en chaque point est définie par :

$\tau = G\theta\rho$; elle est maximum pour $\rho_{maxi} = D/2 = R$

donc $\tau_{maxi} = G\theta D/2$

La condition de résistance est : $\tau_{maxi} = G\theta D/2 \leq Rp$

On obtient le diamètre de la forme suivant :

$$D \leq 2\frac{Rp}{G\theta} = \frac{2.400}{8.10^4 0{,}29.10^{-3}} = 34{,}48mm$$

d'ou on calcul : $\theta = \frac{\alpha}{l} = \frac{20}{1200}\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}29.10^{-3} rd/mm$

on choisit le diamètre **D = 34 mm.**

L'équation du moment de torsion est : $Mt = G\theta Io = G\theta\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

On tire $d = \sqrt[4]{D^4 - \frac{32Mt}{G\theta\pi}}$

Remarque : les unités
Doivent être
P en Watt
N en tr/mn
On tire Mt en N.m

Calculons d'abord le moment de torsion Mt

$$Mt = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\pi N/30} = \frac{30.314.10^3}{\pi.1500} = 2000N.m = 2.10^6 N.mm$$

donc $d = \sqrt[4]{34^4 - \frac{32.2.10^6}{8.10^4.0{,}29.10^{-3}.\pi}} = 26mm$ **d = 26 mm**

Vérification :

1) Condition de résistance : $\tau_{maxi} \leq Rp = 400\ N/mm^2$

$$\tau_{maxi} = \frac{Mt}{Io}\cdot\frac{D}{2} = \frac{2.10^6.17}{\frac{\pi}{32}(34^4 - 26^4)} = 393{,}84\ N/mm^2 < 400\ N/mm^2$$

2) Condition de rigidité : $\alpha \leq 20°$

$$\alpha = \frac{Mt.l}{GIo}\cdot\frac{180}{\pi} = \frac{2.10^6 1200.180}{8.10^4\frac{\pi}{32}(34^4 - 26^4)\pi} = 19{,}91° \langle 20°$$

Les deux conditions sont vérifies pour D = 34 mm et d = 26 mm.