3ème Année licence : Physique fondamentale
Module : Transfert de chaleur
Corrigé de TD4 : Transfert par rayonnement

Exercice 1 :

Pour chauffer une pièce, on utilise un radiateur cylindrique de diamètre D = 2 cm et de longueur L = 0.5 m. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet à travers sa surface latérale un flux de 1 kW. On néglige les échanges par convection et conduction.
1) Calculer la température θ en Celsius du radiateur.
2) Déterminer la longueur d'onde λ_{max} pour laquelle la densité spectrale d'énergie émise par le radiateur est maximale.
3) Quelle devrait être la température du radiateur pour que cette longueur d'onde soit de 2 μm ? Quelle serait alors le flux dégagé ?
On donne $\sigma_0 = 5.68\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$ (C^{te} de Stefan – Boltzmann).

Solution :

Données :

- Diamètre du radiateur cylindrique :D = 2 cm = $2\ 10^{-2}$ m
- Longueur du radiateur cylindrique : L = 0.5 m = $5\ 10^{-1}$ m
- Flux rayonné par la surface latéral du radiateur : Φ^0 = 1 kW = 1000 W

1. Calcul de la température θ (en Celsius) du radiateur :

Surface latérale du radiateur de forme cylindrique :

$$S = 2\pi \frac{D}{2} L = (2)(3.14)\left(\frac{2\ 10^{-2}}{2}\right)(5\ 10^{-1}) = 3.14\ 10^{-2}\ m^2$$

Soit T la température du radiateur en K et θ sa température en °C et Tp la température de la pièce chauffée. Il existe une relation simple entre T et θ :

$$T(K) = \theta(°C) + 273$$

On néglige la chaleur absorbée par le radiateur. Le seul flux pris en compte est celui émis par le radiateur sous forme de rayonnement thermique. D'après la loi de Stefan – Boltzmann, on a :

$$M^0 = \frac{\Phi^0}{S} = \sigma_0 T^4 \quad \Rightarrow \quad \Phi^0 = \sigma_0 S\, T^4$$

D'où l'on tire la valeur de la température du radiateur:

$$T = \left(\frac{\Phi^0}{\sigma_0\, S}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1000\ \mathrm{W}}{(5.68\ 10-8\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}})\ \ (3.14\ 10^{-2}\ \mathrm{m^2})}\right)^{\frac{1}{4}} = 865.5\ \mathrm{K}$$

Soit en °C :

$$\theta(°C) = 592.5\ °C$$

2. <u>Calcul de de la longueur d'onde maximale</u> :

D'après la première loi de Wien, il vient :

$$\lambda_{max}(\mu m) = \frac{2880\ (\mu m.K)}{T\ (K)} = \frac{2880\ 10^{-6}\ (m)}{865.5\ (K)} = 3.33\ 10^{-6}\ m = 3.33\ \mu m$$

3. <u>Température T' du radiateur pour que λ_{max} soit égale à 2 µm</u> :

En utilisant toujours la première loi de Wien, on a :

$$T'(K) = \frac{2880\ (\mu m.K)}{\lambda_{max}(\mu m)} = \frac{2880\ (\mu m.K)}{2\ \mu m} = 1440\ K$$

<u>Flux dégagé</u> :

En utilisant la loi de Stefan – Boltzmann, il vient :

$$\frac{\Phi'^0}{\Phi^0} = \frac{\sigma_0\, S\, T'^4}{\sigma_0\, S\, T^4} \Rightarrow \Phi'^0 = \Phi^0 \left(\frac{T'}{T}\right)^4 = (1000\ W)\left(\frac{1440}{865.5}\right)^4 = 7.66\ W$$

<u>Exercice</u> 2 :

Une source (S) de surface S = 0.01 m^2 se comporte comme un corps noir. Son émittance est M^0 = 3140 $W.m^{-2}$. Elle émet en direction de trois écrans E_1, E_2 et E_3 de surface S' = 0.01 m^2 chacun, à la distance d = 1 m de la source, disposés comme suit :

- E_1 et S situés à la verticale, entre E_2 et E_3 ($E_1 \perp S$).
- E_2 à droite de E_1, incliné de $\pi/4$ par rapport à la verticale.
- E_3 à gauche de E_1, E_3 incliné de $\pi/3$ par rapport à la verticale.

1) Calculer la température de la source.
2) Quels sont les flux énergétiques qui tombent sur chacun des écrans ? On donne σ_0 = 5.68 10^{-8} $W.m^{-2}.\ K^{-4}$ (C^{te} de Stefan – Boltzmann).

Solution :

1. <u>Température de la source (S)</u> :

D'après la loi de Stefan – Boltzmann, on a :

$$M^0 = \sigma_0 T^4 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{M^0}{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{3140\ W.m^{-2}}{5.68\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 484.93\ K \sim 485\ K$$

2. Flux énergétiques qui tombent sur chacun des trois écrans E_1, E_2 et E_3 :

Considérons deux éléments de surface dS_1 et dS_2 appartenant respectivement aux surfaces (S_1) et (S_2) et écrivons l'expression du flux total émis par l'élément dS_1 et arrivant sur dS_2, il est donné par :

$$d\Phi_{12} = \frac{L_1^0\ dS_1\ \cos\theta_1\ dS_2\ \cos\theta_2}{d^2} \tag{1}$$

L'élément de surface dS_1 obéit à la loi de Lambert, soit :

$$L_1^0 = \frac{M_1^0}{\pi} \tag{2}$$

En injectant (1) dans (2), il vient :

$$d\Phi_{12} = \frac{M_1^0\ dS_1\ \cos\theta_1\ dS_2\ \cos\theta_2}{\pi d^2} \tag{3}$$

2.1. Flux énergétique qui tombe sur l'écran E_1 :

Il est donné par :

$$d\Phi_{SE_1} = \frac{M_1^0\ dS_S\ \cos\theta_S\ dS_{E_1}\ \cos\theta_{E_1}}{\pi d^2}$$

Avec d'après les données :

$$\cos\theta_S = \overrightarrow{(n_S\,.\vec{d})} = \cos 0 = 1\ ,\ \cos\theta_{E_1} = \left(\overrightarrow{n_1}\,.\vec{d}\right) = \cos 0 = 1\ ,\ dS_S = dS_{E_1} = S$$
$$= 10^{-2}\ m^2$$

Avec $\overrightarrow{n_S}$ vecteur unitaire de la source S, $\overrightarrow{n_1}$ vecteur unitaire de S_1, surface de l'écran E_1. Soit, en définitive :

$$d\Phi_{SE_1} = \frac{(3140\ W.m^{-2)})\ (10^{-2}m^2\ )\ (1)\ (10^{-2}m^2)\ (1)}{(3.14)(1^2\ m^2)} = 0.1\ W$$

2.2. Flux énergétique qui tombe sur l'écran E_2 :

Il est donné par :

$$d\Phi_{SE_2} = \frac{M_1^0\ dS_S\ \cos\theta_S\ dS_{E_2}\ \cos\theta_{E_2}}{\pi d^2}$$

Avec d'après les données :

$$\cos \theta_S = \overrightarrow{(n_S} . \vec{d}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.71\ ,\ \cos \theta_{E_2} = \left(\overrightarrow{n_2} . \vec{d}\right) = \cos 0 = 1\ ,$$

$$dS_S = dS_{E_2} = S = 10^{-2}\ m^2$$

Avec $\overrightarrow{n_2}$ vecteur unitaire de S_2, surface de l'écran E_2. Soit, en définitive :

$$d\Phi_{SE_1} = \frac{(3140\ W.m^{-2)})\ (10^{-2}m^2\ )\ (0.71)\ (10^{-2}m^2)\ (1)}{(3.14)(1^2\ m^2)} = 0.07\ W$$

2.3. <u>Flux énergétique qui tombe sur l'écran E_3</u> :

Il est donné par :

$$d\Phi_{SE_3} = \frac{M_1^0\ dS_S\ \cos\theta_S\ dS_{E_3}\ \cos\theta_{E_3}}{\pi d^2}$$

Avec d'après les données :

$$\cos \theta_S = \overrightarrow{(n_S} . \vec{d}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5\ ,\ \cos \theta_{E_3} = \left(\overrightarrow{n_2} . \vec{d}\right) = \cos 0 = 1\ ,$$

$$dS_S = dS_{E_3} = S = 10^{-2}\ m^2$$

Avec $\overrightarrow{n_3}$ vecteur unitaire de S_3, surface de l'écran E_3. Soit, en définitive :

$$d\Phi_{SE_1} = \frac{(3140\ W.m^{-2)})\ (10^{-2}m^2\ )\ (0.5)\ (10^{-2}m^2)\ (1)}{(3.14)(1^2\ m^2)} = 0.05\ W$$

<u>Exercice</u> 3 :

On désire étalonner un récepteur de rayonnement thermique. Pour cela, on dispose d'un four muni d'une ouverture circulaire de 20 mm de diamètre dont la luminance est $3.72\ 10^5\ W.m^{-2}$. La partie sensible du récepteur a une aire de $1.6\ 10^{-5}\ m^2$. On place le récepteur parallèlement à l'ouverture. A quelle distance, son éclairement est-il de $1000\ W.m^{-2}$?

Solution :

1. <u>Distance Four-Récepteur pour laquelle l'éclairement vaut $E_R = 1000\ W.m^{-2}$</u> :

Données :

- Diamètre D_F de l'ouverture circulaire du four : $D_F = 20\ mm = 20\ 10^{-3}\ m$
- Surface S_F de l'ouverture circulaire du four :

$$S = \pi \left(\frac{D_F}{2}\right)^2 = (3.14)\left(\frac{20\ 10^{-3}}{2}\right)^2 = 3.14\ 10^{-4}\ m^2$$

- Aire sensible récepteur $S_R = 1.6\ 10^{-5}\ m^2$

- $\cos\theta_F = (\overrightarrow{n_F} . \vec{d}) = \cos 0 = 1$, $\cos\theta_R = (\overrightarrow{n_R} . \vec{d}) = \cos 0 = 1$

L'expression du flux émis par la surface du four S_F et arrivant sur la surface du récepteur S_R, est donnée par :

$$\Phi_{FR} = \frac{L^0\ S_F\ \cos\theta_F\ S_R\ \cos\theta_R}{d^2} \tag{1}$$

L'éclairement résultant sur la surface S_R du récepteur est donnée par:

$$E = \frac{\Phi_{FR}}{S_R} \tag{2}$$

Il s'exprime comme l'émittance en W/m^2. Comme le four et le récepteur se comportent comme des corps noirs, tout le flux émis par le four est reçu par le récepteur. Soit, en injectant (1) dans (2) :

$$E = \frac{L^0\ S_F\ \cos\theta_F\ S_R\ \cos\theta_R}{S_R\ d^2} = \frac{L^0\ S_F}{d^2} \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{L^0\ S_F}{E}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3.72\ 10^5\ W.m^{-2})(3.14\ 10^{-4}\ m^2)}{1000\ W.m^{-2}}} = 0.342\ m \tag{3}$$

Bon courage
Prof. S. KHENE