Chaînes de Markov-Partie4

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 28, 2020

Abstract
E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base-Suite

1.1.1 Introduction

1.1.2 Dynamique markovienne

1.1.3 Distributions marginales

1.1.4 Propriété de Markov forte

1.1.5 Chaînes de Markov homogènes

On s'intéresse aux chaînes de Markov dont les transitions sont indépendantes de la variable temporelle. La distribution d'une chaîne de Markov homogéne est caractérisée par la

distribution π_0 de la variable al´eatoire initiale X_0 et la matrice de transition P.

Définition Une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geq 0}$est dite homogéne si sa matrice de transition P_n est indépendante de n.

Les distributions marginales sont définies par les puissances de la matrice de transition:

$$\pi_n = \pi_0 P^n, \text{pour tout} \quad n \geq 1$$

Remarque La décomposition algébrique de la puissance P^n est définie par

les produits P^k. P^{n-k}, pour tout $k \leq n$, la formule de Chapman-Kolmogorov représente l'aspect probabiliste de cette décomposition.

Résultat On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène de distribu-

tion initiale π_0 et de matrice de transition P. Le processus aléatoire $(X_{k+n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène caractérisée par la distribution initiale π_k et la matrice de transition P.

On peut généraliser ce résultat aux temps d'arrêts en s'appuyant sur la propriété de Markov forte.

Rappel

Théorème

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov et τ un temps d'arrêt à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$,pour toute partie A de E et $n \geq 1$:

$$E\left[X_{\tau+n} \in A \mid F^X_{\tau+n-1}\right] = E\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right].$$

1.1.6 Graphe de transition

A toute chaîne de Markov, on peut associer un graphe de transition de la façon suivante: les sommets du graphe sont les états de la chaîne et il existe un arc, étiqueté $P_{i;j}$,de i vers j si $P_{i;j} \succ 0$.

1.1.7 Exemples sur les chaînes de Markov

Exemple 1 Une suite de variables aléatoire indépendantes identiquement dis-

tribuées (i.i.d) forme une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 2 Toute suite de variables aléatoires discrètes peut être transformée

en une chaîne de Markov.

On considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ définies sur un espace probabilisé (Ω, F, P) , pour tout $n \geq 0$,on définit $X_n := (Z_0, Z_1, ..., Z_n)$.

le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 3 (Processus de Galton-Watson) On considère le processus

généalogique suivant : la première génération (numérotée 0) est constituée d'un nombre donné P_1 d'individus. A chaque génération, chaque individu appartenant à cette génération donne lieu à un nombre aléatoire d'enfants, qui appartiennent à la génération suivante, la règle étant que les nombres d'enfants obtenus par les différents individus aux cours des différentes générations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d).

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par X_n :=nombre d'individus présents dans la génération numéro n, constitue une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 4 (Urne d'Ehrenfest) On considère un récipient contenant un

nombre total de $N \geq 1$ particules, divisé en deux cavités, numérotées 1 et 2, qui communiquent. A chaque pas de temps, une particule parmi les N est choisie uniformément au hasard, et passe de la cavité où elle se trouve à l'autre. En définissant X_n := nombre de particules dans la cavité 1, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ forme une chaîne de Markov. (à vérifier)

Exemple 5 (Ligne téléphonique) On considère une ligne de téléphone. L'état X_n de cette ligne à l'étape n est 0 si elle est libre et 1 si elle occupée. Entre deux instants successifs, il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ pour qu'un appel arrive. Si la ligne est occupée et qu'un appel arrive, cet appel est perdu. La probabilité pour que la ligne se libère entre l'instant n et l'instant $(n+1)$ est $\frac{1}{3}$. La matrice de transition est la suivante:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$