

Réponses Série 4
Chap 3 : Problèmes aux limites elliptiques

Exercice 1.

Réponse :

- Problème (P_1) équivalent à trouver $u \in V = \{v \in H^1(0, 1) / v(0) = 0\}$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) := \int_0^1 (u'v' + \lambda uv) dx = \int_0^1 f v dx$$

Comme $\int_0^1 |u'|^2 dx \geq \int_0^1 |u|^2 dx$, alors $a(u, v) \geq (1 + \lambda) |u|_H^2$.

La forme bilinéaire a est coercive si $\lambda > -1$. Donc on a existence et unicité si $\lambda > -1$, de plus $u \in H^2(0, 1)$ car $u'' \in L^2(0, 1)$.

- Problème (P_2) équivalent à trouver $u \in V = H^1(0, 1)$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) + b(u, v) = \int_0^1 f v dx$$

avec $b(u, v) = \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1)$. La forme bilinéaire $a + b$ est continue car l'injection $H^1(0, 1) \subset C^0[0, 1]$ est continue. Elle est coercive si $\lambda > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. Donc on a existence et unicité pour ces paramètres. La solution $u \in H^2(0, 1)$ et satisfait les conditions aux limites (du type Robin), on peut le vérifier en intégrant par parties.

- Problème (P_3) équivalent à trouver $u \in V = H^1(0, 1)$ tel que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v)$$

avec $L(v) = \int_0^1 f v dx + \alpha v(0) + \beta v(1)$. On a

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |\alpha| |v(0)| + |\beta| |v(1)| \leq C(\|f\|_{L^2} + |\alpha| + |\beta|) \|v\|_{H^1}$$

Donc $L \in V'$. On a existence et unicité si $\lambda > 0$. La solution est dans H^2 .

On a résolu le problème de Neumann non homogène.

Exercice 4.

- $a(u, v)$ est bornée :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \text{continuité de l'application trace} \end{aligned}$$

– a est coercive :

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
 &\geq \min(1, \alpha) (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)}^2) \\
 &\geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \text{grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrich}
 \end{aligned}$$

Le théorème L-M entraîne que (P_5) possède une solution unique.

La solution vérifie au sens des distributions

$$-\Delta u = f \tag{1}$$

Si le domaine est régulier $u \in H^2(\Omega)$. La formule de Green avec l'équation variationnelle entraine

$$\int_{\Gamma} (\gamma_1(u) + \alpha \gamma_0(u)) \gamma_0(v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme $H^{1/2}(\Gamma) = \text{Im}(\gamma_0)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$, il découle que

$$\gamma_1(u) + \alpha \gamma_0(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2}$$

On vient de résoudre le problème aux limites (1)-(2).