فؤاد العيسوب

القوانين الاحتمالية الشهيرة

II. قانون بواسون

LOI DE POISSON

2. قانون بواسون

تعريف:

هو قانون احتمالي يهتم بالظواهر النادرة الحدوث في فترة من الزمن

أو في فضاء (مساحة، حجم،...)

مثال:

- عدد الانتحارات اليومية في بلدة ما
- عدد حوادث السير خلال ساعة من الزمن
- عدد التشويهات على السطح الخارجي لسيارة جديدة
- عدد البكتيريا الضارة في لتر من الماء الشروب

فؤاد العيسوب

1. قانون بواسون

فإذا كان X متغيرا عشوائيا يحسب عدد الأحداث النادرة التي تقع في فترة زمنية (أو في فضاء ما) بمعدل يساوي λ

فإننا سنقول عن X بأنه يخضع (مسير) لقانون بواسون ذو الوسيط λ

نكتب :

$$X \to P(\lambda)$$

فؤاد العيسوب

1. قانون بواسون

قانونه الاحتمالي:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^{x}}{x!}$$

مجموعة قيمه:

$$x \in \{0,1,2,\ldots n,\ldots\} = IN$$

1. قانون بواسون

فإذا كان مثلا $\lambda = 1,5$ وأردنا حساب الاحتمال $P(X=2)$

بواسطة قانون بواسون، فإن:

$$P(X=2) = \frac{e^{-1,5}1,5^2}{2!} = 0,2510$$

ملاحظة: توجد جداول إحصائية خاصة بقانون بواسون(في نهاية كل كتب الإحصاء او بالبحث في الانترنيت تعطي قيم الاحتمالات و تجنب القيام بالحسابات المملة احيانا

فؤاد العيسوب

1. قانون بواسون

Poisson 1.3

k	P(x=k)
0	0.272532
1	0.354291
2	0.230289
3	0.099792
4	0.032432
5	0.008432
6	0.001827
7	0.000339
8	0.000055
9	0.000008
10	0.000001

Poisson 1.4

k	P(x=k)
0	0.246597
1	0.345236
2	0.241665
3	0.112777
4	0.039472
5	0.011052
6	0.002579
7	0.000516
8	0.000090
9	0.000014
10	0.000002

Poisson 1.5

k	P(x=k)
0	0.223130
1	0.334695
2	0.251021
3	0.125511
4	0.047067
5	0.014120
6	0.003530
7	0.000756
8	0.000142
9	0.000024
10	0.000004

فمن الجدول نلاحظ أن قيمة $P(X=2)=(0{,}2510)$ دون عناء الحساب

$$P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$
$$= 0{,}2510 + 0{,}3347 + 0{,}2231 = 0{,}8089$$

فؤاد العيسوب

جامعة باجي مختار-عنابة
Université Badji Mokhtar-Annaba

1. قانون بواسون

مميزاته العددية هي:

- الأمل الرياضي: $E(X) = \lambda$
- التباين: $Var(X) = \sigma^2 = \lambda$
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

1. قانون بواسون

مثال:

حسب احصائيات الشركة المسيرة للنقل عن طريق القطارات تبين أنه يقع في المتوسط **1,3** حادث في السنة، فما هو احتمال وقوع على الأكثر 3 حوادث للقطارات في هذه السنة؟

الحل:

لدينا ظاهرة نادرة تتمثل في حوادث السكة الحديدية السنوية (فترة زمنية) لذلك فان المتغير العشوائي **X** يخضع لقانون بواسون ذو الوسيط $\lambda = 1,3$

أي $X \to P(1,3)$ قانونه الاحتمالي هو: $P(X = x) = \frac{1,3^{x} e^{-1,3}}{x!}$

و مجموعة قيمه الممكنة هي: $X(\Omega) = IN$

1. قانون بواسون

احتمال وقوع على الأكثر 3 حوادث هو: $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

بالرجوع الى الجدول السابق لما $\lambda = 1{,}3$

نجد: $P(X \leq 3) = 0{,}2725 + 0{,}3543 + 0{,}2303 + 0{,}0997$

$$P(X \leq 3) = 0{,}9568$$

2. تقريب قانون ثنائي الحد بواسطة قانون بواسون

بالإضافة للاستعمال المباشر لقانون بواسون في حساب احتمال الاحداث النادرة، يمكن استعماله في تقريب قانون ثنائي الحد عندما يعجز هذا الأخير عن حساب الاحتمال و ذلك لما يكون عدد التكرارات ***n*** كبير و احتمال النجاح ***p*** صغير

$$B(n,p) \underset{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}}{\rightarrow} P(\lambda = np)$$

تطبيقيا، نقول أن ***n*** كبير لما ***n>=30*** و ***p*** صغير لما ***p<=0,1***

نضيف كذلك الشرط ***np<=15***

2. تقريب قانون ثنائي الحد بواسطة قانون بواسون

<u>مثـــال</u>

يعرف بأن نسبة قطع الغيار المطابقة في الإنتاج اليومي هي 5٪. يتم أخذ مجموعة من 50 قطعة من الإنتاج بشكل عشوائي للتحقق من السمك.

نعتبر المتغير العشوائي الذي يحسب عدد القطع غير المطابقة في هذه المجموعة.

1. *حدد القانون الاحتمالي للمتغير*
2. *احسب احتمال ان يكون عدد القطع الغير* مطابقة محصور بين 2 و 5

2. تقريب قانون ثنائي الحد بواسطة قانون بواسون

الحل

$$X \rightarrow B(50\ ,\ 0.05\ )$$

$$P(X = x) = C_{50}^{x}(0.05)^{x}(0.95)^{50-x}$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = ?$$

$$n \geq 30$$

$$p \leq 0.1$$

$$np = 2.5 \leq 15$$

فؤاد العيسوب

2. تقريب قانون ثنائي الحد بواسطة قانون بواسون

الحل

نقوم بتقريب القانون الاحتمالي للمتغير (عدد القطع الغير المطابقة) المتمثل في قانون ثنائي الحد $B(50\ ,0.05)$ بواسطة قانون بواسون $P(\lambda)$ الذي وسيطه

$$\lambda = np = 2.5$$

$$P(X = x) = \frac{2.5^{x} e^{-2.5}}{x!}$$

$$P(2 \le X \le 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$P(2 \le X \le 5) = 0.2565 + 0.2138 + 0.1336 + 0.0668 = 0.6707$$

فؤاد العيسوب