Chaînes de Markov-Partie3

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 25, 2020

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base-Suite

1.1.1 Introduction

1.1.2 Dynamique markovienne

1.1.3 Distributions marginales

1.1.4 Propriété de Markov forte

Introduction

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ avec la distribution initiale π_0 et les matrices de transition $(P_n)_{n\geq 0}$, le processus aléatoire $(X_{n+k})_{n\geq 0}$. est
une chaîne de Markov caractérisée par la distribution initiale π_k et les matrices de transition $(P_{n+k})_{n\geq 0}$.

La proporiété précèdente peut être généralisée aux temps d'arrêt par le théorème suivant:

Théorème Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov et τ un temps d'arrêt à

valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$,pour toute partie A de E et $n \geq 1$:

$$E\left[X_{\tau+n} \in A \mid F^X_{\tau+n-1}\right] = E\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right]$$

Preuve

Soit $A \subset E, B \in F^X_{\tau+n-1}$ et $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} E\left(P\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right] 1_B\right) &= E\left(E\left[1_A\left(X_{\tau+n}\right) \mid X_{\tau+n-1}\right] 1_B\right) \\ &= E\left(\sum_{k\geq 0}\left(\left[1_A\left(X_{k+n}\right) \mid X_{k+n-1}\right] 1_{B\cap\{\tau=k\}}\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{k\geq 0}\left(\left[1_A\left(X_{k+n}\right) \mid F^X_{k+n-1}\right] 1_{B\cap\{\tau=k\}}\right)\right) \end{aligned}$$

Rappelons que:

$$E\left[1_A\left(X_{\tau+n}\right) \mid X_{\tau+n-1}\right] = P\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right],$$

et d'autre part:

$$\sum_{k\geq 0}\left(\left[1_A\left(X_{k+n}\right) \mid X_{k+n-1}\right] 1_{B\cap\{\tau=k\}}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\left[1_A\left(X_{k+n}\right) \mid F^X_{k+n-1}\right] 1_{B\cap\{\tau=k\}}\right),$$

car le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Comme τ est un temps d'arrêt, on a:

$$B \cap \{\tau = k\} = B \cap \{\tau + n - 1 = k + n - 1\} \in F^X_{k+n-1},$$

et par suite:

$$E\left(P\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right] 1_B\right) = E\left(\sum_{k\geq 0} E\left(\left[1_A\left(X_{k+n}\right) 1_{B\cap\{\tau=k\}} \mid F^X_{k+n-1}\right]\right)\right)$$

En basant sur le théorème de la convergence monotone et les projections itérées des espérances conditionnelles, on conclut que:

$$E\left(P\left[X_{\tau+n} \in A \mid X_{\tau+n-1}\right] 1_B\right) = E\left(1_A\left(X_{\tau+n}\right) 1_B\right).$$

Etant donné B est arbitraire, avec:

$$B \in F^{X}_{\tau+n-1},$$

alors, on obtient le résultat demandé d'aprés la définition de l'éspérance conditonnelle. ■