Chaînes de Markov-Partie2

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

May 23, 2020

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Chaînes de Markov

1.1 Notions de base-Suite

1.1.1 Introduction

1.1.2 Dynamique markovienne

1.1.3 Distributions marginales

Soit $(X_0, X_1, ..., X_n)$ un vecteur ($n-$uplet) extrait d'une chaîne de Markov X, les conditionnements successifs permet de définir la distribution de $(X_0, X_1, ..., X_n)$ par:

$$\begin{aligned} P\left[(X_0, X_1, ..., X_n) = (x_0, x_1, ..., x_n)\right] &= P\left[(X_0 = x_0\right].P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x_n) \\ &= \pi_0(x_0).P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

pour tout $x_0, x_1, ..., x_n \in E$.

Remarque

On déduit les probabilités marginales π_n de la distribution π_0 et des matrices de transition:

$$\pi_n(x) = \sum_{x_0, x_1, ..., x_{n-1 \in E}} \pi_0(x_0).P_1(x_0, x_1)...P_n(x_{n-1}, x)$$

En utilisants les notations des matrices, la formule de la distribution π_n est donnée par:

$$\pi_n = \pi_0.P_1...P_n, \text{pour tout } n \geq 1,$$

La distribution π_0 est considérée comme un vecteur ligne de taille $card(E)$ multipliant à gauche le produit de matrices $P_1, .., P_n$.

Formule de Chapman-Kolmogorov La formule de Chapman-Kolmogorov exprime le fait que la probabilité d'aller de x en y entre la date 0 et la date n se décompose comme la somme des probabilités d'aller de x en y en passant par un état z arbitraire à une date intermédiaire k, elle est donnée par:

$$P\left[X_n = y \mid X_0 = x\right] = \sum_{z \in E} P\left[X_n = y \mid X_k = z\right].P\left[X_k = z \mid X_0 = x\right];\ x, y \in E \text{ pour tous } \ 0 \leq k \leq n.$$

Espérance conditionnelle et matrice de transition Pour toute fonction

intégrable ou positive $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$,l'ésperance conditionnelle $E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right]$ se calcule en utilisant la matrice de transition P_n :

$$\begin{aligned} E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right] &= E\left[f\left(X_n\right) \mid X_{n-1}\right] \\ &: \quad = \left(P_n f\right)\left(X_{n-1}\right) = \sum_{y \in E} P_n(X_{n-1}, y) f(y). \end{aligned}$$

Si on représente f par un vecteur colonne $f(x), x \in E$, de taille card E,la formule de $E\left[f\left(X_n\right) \mid F_{n-1}^X\right]$ présente le produit matriciel à droite $P_n f$:

$$E\left[f\left(X_n\right) \mid X_{n-1} = x\right] = \left(P_n f\right)(x)$$

Espérance non conditionnelle et matrice de transition L'espérance non conditionnelle de la variable aléatoire $f\left(X_n\right)$ se calcule par le produit matriciel:

$$E\left[f\left(X_n\right)\right] = \pi_0 P_1...P_n f, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Notons que la distribution π_0 est représentée par un vecteur ligne, alors que la fonction f est représentée par un vecteur colonne.