(5) Ennoncé : Le système mécanique ci-dessous est utilisé dans certains dispositifs de pilotage automatique consiste en un cylindre rempli de fluide et comportant 2 parties de sections différentes S et S'. Les 2 pistons de sections respectives S et S' sont reliés par un ressort de raideur r

Il existe une fuite (schématisée sur la figure par un trou dans le piston S') dont le débit est selon la loi de poiseuille, proportionnel à la différence de pression P_1 et P_2

Hypothèse simplificatrices:

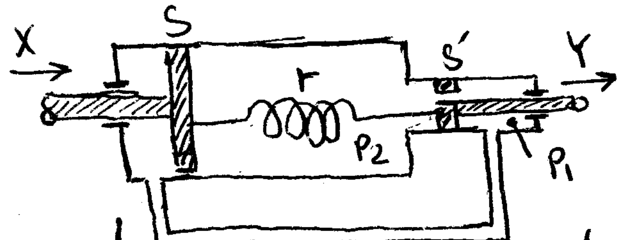
- On ne tient pas compte de la masse des pistons et celle du fluide
- le fluide est incompressible
- les pertes de charges sont négligeables

2 a) a.1 Trouver la relation $H(p) = Y(p)/X(p)$ entre les déplacements X et Y

a.2 Trouver les expressions de T, T', K, λ en fonction des élements du système

1 b) Trouver un schéma électrique équivalent

2 c) Calculer la réponse à un echelon de position unitaire (Interpreter physiquement cette réponse)



d) Tracez le diagramme de Nyquist

Ex n° xx Solution

a) Les hypothèses simplificatrices nous permettent d'écrire :

Équation de forces : "petit piston"

$$r(x-y) + S'(p_2-p_1) = 0$$

Équation de débit :

$$S\frac{dx}{dt} - S'\frac{dy}{dt} = k(p_2-p_1)$$

En éliminant p_2-p_1 on obtient :

$$\frac{S'^2}{kr}\frac{dy}{dt} + y = x + \frac{SS'}{kr}\frac{dx}{dt}$$

Utilisons la T.L pour trouver par la suite $H(p)$

$$\left[\frac{S'^2}{kr}p+1\right]Y(p) = \left[1+\frac{SS'}{kr}\right]X(p)$$

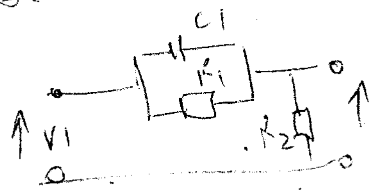
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1+SS'/kr\cdot p}{1+S'^2/kr\,p} \quad ; \quad H_{standard} = \frac{K(1+T'p)}{1+Tp}$$

par identification :

$\boxed{K=1}$, $\boxed{T' = \frac{SS'}{kr}}$, $\boxed{T = \frac{S'^2}{kr}}$; $\lambda = \frac{T'}{T} = \frac{S}{S'} > 1 \Rightarrow$

$\lambda > 1$ système à avance de phase.

b) Le schéma électrique équivalent est :

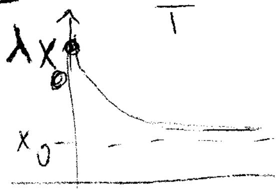


$\Rightarrow H(p)_{12}$

c) $H(p) \sim \frac{1+T'p}{1+Tp}$, $x = x_0\Gamma(t)$

$$Y(p) = \frac{x_0}{p}\cdot\frac{1+T'p}{1+Tp} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp} = \frac{x_0}{p} - x_0\frac{(T-T')}{T}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$$

$$y(t) = x_0\left(1-\left(1-\frac{T'}{T}\right)e^{-t/T}\right)$$



Quand on déplace le piston de gauche celui de droite y se déplace immédiatement d'un déplacement plus élevé, puisque au 1er instant lors du déplacement on déplace la même quantité de liquide comme la section S est plus grande que S' donc Y est plus grand que X.

puis, le piston de gauche restant immobile, le piston de droite est soumis sous l'action du ressort r "allongé" refoule le fluide à travers le passage capillaire jusqu'à celui de droite ait le déplacement qui était créé par celui de droite

d) diagramme de Nyquist

– on démontre que $H(p) = \frac{K(1+T'p)}{1+Tp}$ décrit un cercle dans le plan de $H(j\omega)$

– on sait que le système est à avance de phase $\lambda > 1$
 $\omega > 0$, le demi cercle est en haut par rapport à l'axe des X

– il reste à déterminer 2 points du cercle

$\omega \to 0 \sim p = 0 + j\omega \quad p \to 0 \to H(j\omega) = K$

$\omega \to \infty \sim p = j\omega \quad p \to \infty \to H(j\omega) = K.\lambda = 1 . \frac{S'}{S}$