Chapitre 3 : La transformée de Laplace

1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous introduisons un autre outil mathématique important dans l'étude des signaux et des systèmes connus sous le nom de transformée de Laplace. La transformée de Laplace peut être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier. En raison de sa nature plus générale, elle présente un certain nombre d'avantages par rapport à la transformée de Fourier.

La représentation par la transformée de Laplace existe pour certains signaux qui n'ont pas de représentations par transformée de Fourier, ainsi, nous pouvons gérer une plus grande classe de signaux avec la transformée de Laplace. Etant donnée que la transformation de Laplace est un outil plus général, elle peut donc fournir des informations supplémentaires au-delà de celles fournies par la transformation de Fourier.

2. Définition de la transformation de Laplace :

La transformée de Laplace de la fonction $x(t)$ notée $\mathcal{L}\{x(t)\}$ ou $X(s)$ est définie comme :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,e^{-st}\ dt$$

La transformée inverse de Laplace est donnée par :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)\,.\,e^{st}\ ds$$

Où : $s = Re\{s\}$

Nous appelons $x(t)$ et X(s) une paire de transformées de Laplace et désignons cette relation comme

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$$

Comme nous pouvons le voir dans l'expression de la transformée inverse de Laplace ; le calcul nécessite une intégration de contour (puisque s est une variable complexe). En particulier, nous devons intégrer le long de la ligne verticale $s = \sigma$ dans le plan complexe. Une telle intégration n'est souvent pas si facile à calculer. Par conséquent, dans la pratique, nous ne calculons généralement pas directement la transformée de Laplace inverse en utilisant cette formule, au lieu de cela, nous avons recours à d'autres moyens (à discuter plus tard).

Deux versions différentes de la transformation de Laplace sont couramment utilisées. La première est la version bilatérale, telle qu'introduite précédemment. La seconde est la version unilatérale. La transformation unilatérale de Laplace est le plus souvent utilisée pour résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires avec des conditions initiales non nulles. En fait, la seule différence entre les définitions des transformations bilatérales et unilatérales de Laplace se situent dans la limite inférieure d'intégration. Dans le cas bilatéral, la limite inférieure est $-\infty$, tandis que dans le cas unilatéral, la limite inférieure est 0. Dans la suite de ce chapitre, nous concentrerons notre attention principalement sur la transformée bilatérale de Laplace. Nous présenterons cependant brièvement la transformée unilatérale de Laplace comme outil de résolution d'équations différentielles. Sauf indication contraire, toutes les références ultérieures à la transformation de Laplace doivent être comprises comme signifiant une transformation bilatérale de Laplace.

3. Relation entre la transformée de Laplace et la transformée de Fourier à temps continu

Dans la section précédente, nous avons présenté la transformée de Laplace, et dans le chapitre précédent, nous avons étudié la transformée de Fourier. Il s'avère que la transformée de Laplace et la transformée de Fourier sont très étroitement liées. Rappelons la définition de la transformée de Laplace dans l'expression précédente. Considérons maintenant le cas particulier où $s = j\omega$ et ω est un réel (c'est-à-dire $Re\{s\} = 0$). Dans ce cas, l'expression de la transformée de Laplace devient :

$$X(s)\,|_{s=j\omega} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,e^{-st}\;dt\right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,e^{-j\omega t}\;dt\right]$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Ainsi, la transformée de Fourier est simplement la transformée de Laplace évaluée à $s = j\omega$. En d'autres termes,

$$X(s)\,|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Par ailleurs, c'est en raison de la relation précédente que la transformée de Fourier de $x(t)$ est parfois écrite comme $X(j\omega)$. Lorsque cette notation est utilisée, la fonction X correspond en fait à la transformée de Laplace de $x(t)$ plutôt qu'à sa transformée de Fourier (c'est-à-dire que l'expression $X(j\omega)$ correspond à la transformée de Laplace évaluée aux points de l'axe imaginaire).

Maintenant, considérons le cas général d'une valeur complexe arbitraire pour s dans l'expression de la transformée de Laplace. Exprimons s sous forme cartésienne comme $s = \sigma + j\omega$ où s et ω sont réels. En substituant $s = \sigma + j\omega$ dans l'expression de Laplace, on obtient :

$$X(s)\,|_{s=j\omega} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,.\,e^{-(\sigma+j\omega)t}\ \ dt\right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-\sigma t}\right].\,e^{-j\omega t}\ \ dt$$

$$= \mathcal{F}\{\ e^{-\sigma t}\ x(t)\}$$

Ainsi, la transformée de Laplace de $x(t)$ peut être considérée comme la transformée de Fourier de $x(t)\ e^{-\sigma t}$ (c'est-à-dire $x(t)$ pondérée par un signal exponentiel réel). En conséquence de la multiplication par $e^{-\sigma t}$ exponentielle réelle, la transformée de Laplace d'un signal peut exister lorsque la transformée de Fourier du même signal n'existe pas.

En utilisant la relation ci-dessus, nous pouvons retrouver la formule de la transformée inverse de Laplace. Supposons que nous ayons :

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

Où : $s = \sigma + j\omega$; (σ et ω sont des réels)

De la relation entre les transformées de Fourier et Laplace, nous avons :

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{\ e^{-\sigma t}\ x(t)\}$$

Faisons la transformée de Fourier inverse des deux côtés de l'équation précédente donne

$$\mathcal{F}^{-1}\{\ X(\sigma + j\omega)\} = x(t)\ e^{-\sigma t}$$

En multipliant les deux côtés par $e^{\sigma t}$, on obtient :

$$x(t) = e^{\sigma t}.\mathcal{F}^{-1}\{\ X(\sigma + j\omega)\}$$

D'après la définition de la transformée inverse de Fourier, nous avons :

$$x(t) = e^{\sigma t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}\ \ d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)\ e^{(\sigma+j\omega)t}\ \ d\omega$$

Puisque : $s = \sigma + j\omega$, nous avons : d$s = jd\omega$

Et par conséquent :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{st}\, \left({}^{1}\!/_{j}\right)\, ds$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)\, e^{st}\; ds$$

Ainsi, nous venons de retrouver la formule de transformée inverse de Laplace comme dans l'expression du paragraphe 2

4. Exemples de Transformées de Laplace :

Dans cette section, nous calculons la transformée de Laplace de plusieurs signaux relativement simples. Au fur et à mesure de la présentation de la solution nous verrons des informations importantes sur la transformation de Laplace.

Exemple 1 : Déterminer la transformée de Laplace X (s) du signal : $x(t) = e^{-at}\, u(t)$

Soit : $s = \sigma + j\omega$; (σ et ω sont des réels)

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at}\, u(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\, u(t)\, .\, e^{-st}\; dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\; dt$$

$$\left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\right]\Big|_0^\infty$$

À ce stade, nous substituons $s = \sigma + j\omega$ afin de déterminer plus facilement l'instant où l'expression ci-dessus converge vers une valeur finie. Cela donne :

$$X(s) = \left[\left(-\frac{1}{\sigma + a + j\omega}\right) e^{-(\sigma+a+j\omega)t}\right]\Big|_0^\infty$$

$$= \left(-\frac{1}{\sigma + a + j\omega}\right)\left[e^{-(\sigma+a)t} . \, e^{-j\omega t}\right]\Big|_0^\infty$$

$$= \left(-\frac{1}{\sigma + a + j\omega}\right)\left[e^{-(\sigma+a)\infty} . \, e^{-j\omega\infty} - 1\right]$$

$$X(s) \;= \left(-\frac{1}{\sigma + a + j\omega}\right)[0 - 1]$$

$$= \left(-\frac{1}{\sigma + a + j\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{s + a}$$

Ainsi, nous pouvons voir que l'expression ci-dessus ne converge que pour $(\sigma + a) > 0$ (c'est-à-dire $Re\{s\} > -a$).

Ainsi on a :
$$e^{-at}\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s + a}$$

pour $Re\{s\} > -a$