

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة باجي مختار عنابة



UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

COURS SUR LES

ANTENNES

Par Professeur TOUMI Salah

# CHAPITRE I : POTENTIEL VECTEUR, POTENTIEL SCALAIRE, CONDITION DE LORENTZ

## I- Définition de $\vec{A}$ et $V$ , Equation de propagation, Condition de Lorentz

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \delta \vec{B} / \delta t \qquad \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \delta \vec{D} / \delta t$$

$$\vec{\text{div}} \vec{D} = \rho \qquad \vec{\text{div}} \vec{B} = 0$$

$$\text{On pose : } \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \qquad \{ \vec{\text{div}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0 \}$$

On appelle  $\vec{A}$  : Potentiel vecteur

$$\delta \vec{B} / \delta t = \delta \vec{\text{rot}} \vec{A} / \delta t = \vec{\text{rot}} (\delta \vec{A} / \delta t)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \delta \vec{B} / \delta t = 0 \rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} + \vec{\text{rot}} (\delta \vec{A} / \delta t) = 0 \rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{E} + \delta \vec{A} / \delta t) = 0$$

On sait que :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}) = 0$

$$\underline{\vec{E} + \delta \vec{A} / \delta t = - \vec{\text{grad}} V}$$

On appelle  $V$  : Potentiel scalaire.

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \qquad \mu \cdot \vec{H} : \vec{\text{rot}} \vec{A} \qquad \vec{H} = 1/\mu \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = 1/\mu \cdot \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 1/\mu \cdot \{ \vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \}$$

$$= \vec{J} + \delta \vec{D} / \delta t = \vec{J} + \epsilon \cdot \delta \vec{E} / \delta t$$

$$\vec{\text{grad}} (\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta \vec{E} / \delta t$$

$$\vec{E} + \delta \vec{A} / \delta t = - \vec{\text{grad}} V \qquad \delta \vec{E} / \delta t = - \vec{\text{grad}} \delta V / \delta t - \delta^2 \vec{A} / \delta t^2$$

$$\vec{\text{grad}} (\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} - \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \{ \vec{\text{grad}} \delta V / \delta t + \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 \} = 0$$

$$\vec{\text{grad}} \{ \vec{\text{div}} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t \} - \Delta \vec{A} - \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0$$

Je peux alors poser :  $\underline{\vec{B} = \vec{\text{rot}} (\vec{A} + \vec{\text{grad}} f)}$  du moment que :  $f = \vec{\text{div}} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t = 0$

**C'est la condition de Lorentz.**

$$\underline{\Delta \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0} : \qquad \text{est l'équation de propagation du vecteur potentiel } \vec{A}.$$

$\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{A}$  se propagent suivant une loi identique.

La vitesse de propagation est  $v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu}$

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V - \delta \vec{A} / \delta t$$

$$\text{Nous avons : } \vec{\text{div}} \vec{D} = \rho \qquad \vec{\text{div}} \vec{E} = \rho / \epsilon$$

$$\vec{\text{div}} \vec{E} = - \vec{\text{div}} (\vec{\text{grad}} V) - \vec{\text{div}} (\delta \vec{A} / \delta t)$$

$$\rho / \epsilon = - \Delta V - \operatorname{div} (\delta \vec{A} / \delta t)$$

de la condition de Lorentz :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} (\delta \vec{A} / \delta t) = - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2$$

$\Delta V + \rho / \epsilon - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 = 0$  : est l'équation de propagation du potentiel scalaire V.

La vitesse de propagation est  $v_\phi = 1 / \sqrt{\epsilon \cdot \mu}$  ou  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$  dans le cas du vide.

On vient de montrer qu'à chaque fois qu'on a un champs vecteur  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , alors il existe  $\vec{A}$  et  $V$   $\rightarrow$  si on peut trouver  $\vec{A}$  et  $V$  alors on peut connaître  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ .

## II- Les potentiels retardés

On va essayer de déterminer V dans le cas le plus général. On considère un volume  $d\tau$  et on se place à une distance r, dans  $d\tau$ , il existe une densité de charge  $\rho(t)$ .



On appelle V, le potentiel créé par la charge  $\rho$  dans le volume  $d\tau$  au point M.

$$\Delta V - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho(t) / \epsilon = 0$$

$\Delta V$  en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = 2/r \cdot \delta V / \delta r + \delta^2 V / \delta r^2 = 1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2$$

$$1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2 - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho(t) / \epsilon = 0$$

$\rho(t)$  existe dans  $d\tau$   $\rightarrow$  mais au point M,  $\rho(t) = 0$

$$1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2 = 1/c^2 \cdot \delta^2 V / \delta t^2$$

$r \cdot V$  vérifie l'équation des cordes vibrantes.

$$r \cdot V = f(t - r/c) + g(t + r/c)$$

L'onde réfléchie n'a aucune signification physique car on est dans le vide.

$$r \cdot V = f(t - r/c) \rightarrow V = 1/r \cdot f(t - r/c).$$

La cause qui se produit en  $d\tau$  a un effet retardé sur M.

En électrostatique :  $V_s = \rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r$  (Poisson).

$\rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r = 1/r \cdot f(t)$  ( $r \rightarrow 0$ ).

$f(t) = \rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon$  toujours  $r \rightarrow 0$ .

$V = 1/r \cdot \rho(t - r/c) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon$

$\rho(t - r/c)$  est la charge qui existait à l'instant antérieur au point O.

Ce qui se passe en O est retardé par rapport à ce qui se passe en M.

$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \int \int \int \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r$

V est un potentiel retardé  $\rightarrow$  ce qui se passe en M est dû à ce qui se passe en O à l'instant  $t-r/c$ .

$\rightarrow$  A et V n'ont pas de signification physique, ils représentent des artifices de calculs pour trouver E et  $\vec{H}$ .  $\rightarrow$

$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \int \int \int_{\text{vol.}} \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r$

Dans le cas où on a un domaine surfacique de charge  $\sigma$  :

$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \int \int \int_{\text{vol.}} \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r + 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \int \int_{\text{surf.}} \sigma(t - r/c) \cdot d\tau / r$

$\rightarrow$

$A = \mu / 4 \cdot \pi \int \int \int_{\text{vol.}} J(t - r/c) \cdot d\tau / r$

$\int \int \int_{\text{vol.}}$  est l'intégrale triple sur le volume.

$\int \int_{\text{surf.}}$  est l'intégrale double sur la surface.

Equations fondamentales de base de la théorie des antennes :

$$\vec{E} = - \text{grad } V - \delta \vec{A} / \delta t$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} / \mu$$

$$\Delta V - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho / \epsilon = 0$$

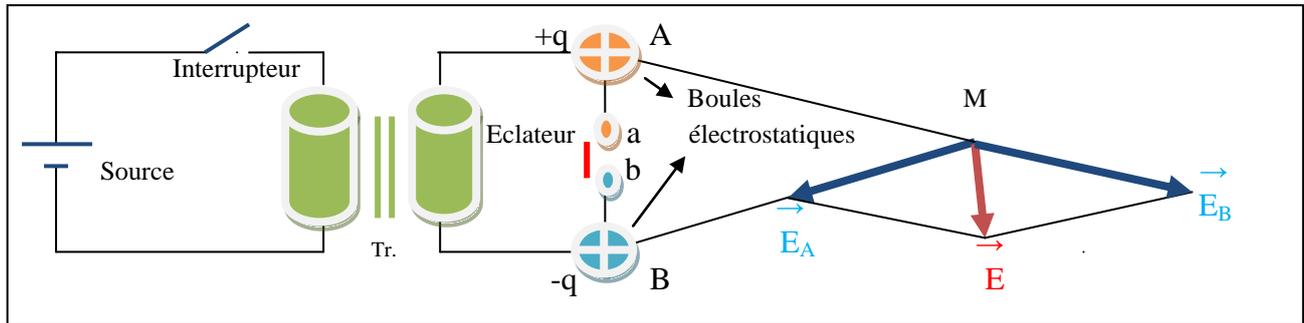
$$\text{div} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t = 0$$

$$\Delta \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0.$$

## CHAPITRE II : RAYONNEMENT DU DOUBLET

### I- Introduction

Hertz a fait l'expérience fondamentale ( en 1888 ) suivante :



→  
 $E_A$  est le champ créé par A au point M,

→  
 $E_B$  est le champ créé par B au point M.

Si on charge (interrupteur fermé), puis on éclate ( éclateur ab fermé) les boules A et B plusieurs fois, on aura un phénomène périodique qui se transforme en un phénomène sinusoïdal.

$$q_A = Q \cdot e^{j\omega t}$$

$$q_B = - Q \cdot e^{j\omega t} \text{ avec } Q > 0.$$

Au moment de la décharge, on a un courant :  $i = I \cdot e^{j\omega t}$

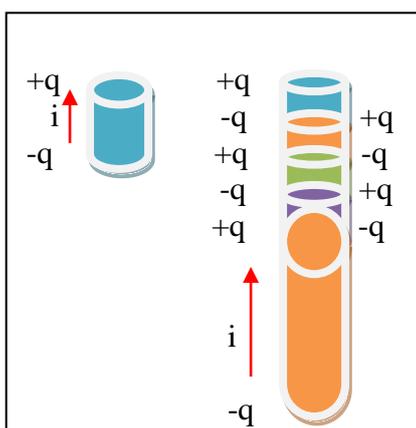
$$i = dq / dt = j \cdot \omega \cdot q = j \cdot \omega \cdot Q \cdot e^{j\omega t}$$

$$I = \omega \cdot Q \cdot e^{j\pi/2}$$

Ce courant I crée un champ B dû à l'ionisation de l'air. On a donc un rayonnement ( le système rayonne ). Donc en tout point de l'espace on a un champ E et un champ H.

Ce doublet est le doublet de Hertz.

**Doublet théorique** : est un élément infiniment petit de longueur dl parcouru par un courant i.



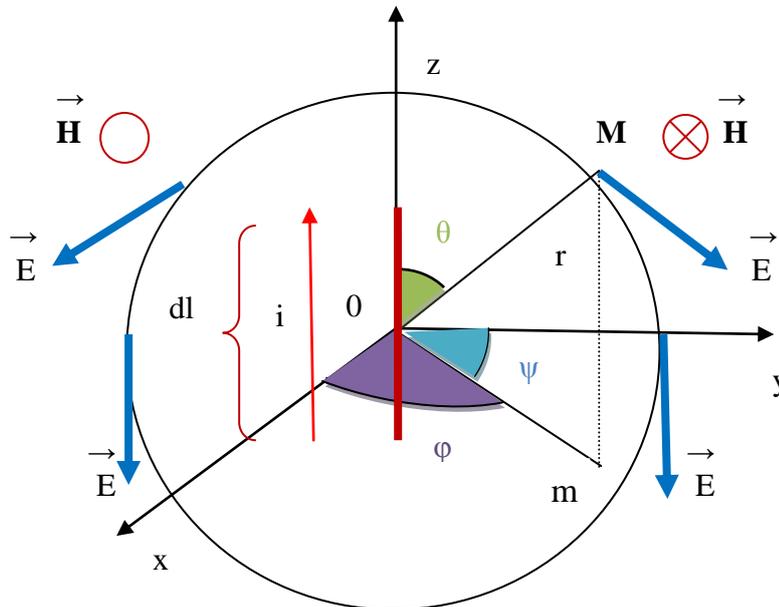
On peut prendre un élément beaucoup plus grand et le partager en petits éléments, les charges s'annulent deux à deux :

→ il en reste que celles des deux bouts.

## II- Mise en équation, Pot V, A du doublet

### II-1 Références

Soit un doublet électrique dans un repère :



### II-2 Calcul de A

$$A = \mu / 4.\pi . \iiint_{vol.} i ( t-r/c) . d\tau / r$$

$$A \text{ est } // i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \end{cases}$$

Le volume se ramène à une longueur du moment que la section est infiniment petite.

$$A = \mu i ( t - r/c) . dl / 4.\pi.r$$

$$A = j . \omega . Q \mu e^{j(\omega t - k.r)} . dl . e_z / 4.\pi.r \quad k = \omega / c$$

$$A_z = \mu . dl . I . e^{j(\omega t - k.r)} / 4.\pi.r$$

### II-3 Calcul de V

On utilise la méthode de :  $\text{div}A + \epsilon.\mu.\delta V / \delta t = 0$

$$A \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z \end{cases} \quad \text{on se ramène à} \quad A \begin{cases} A_r = A_z . \cos \theta \\ A_\theta = - A_z . \sin \theta \\ A_\phi = 0 \end{cases}$$

Il va falloir projeter A dans le repère  $( e_r , e_\theta , e_\phi )$

$$\text{div}A = 2.A_r / r + \delta A_r / \delta r + 1 / r . \delta A_\theta / \delta \theta + A_\theta / r.tg\theta + 1 / r.\sin\theta . \delta A_\phi / \delta \phi$$

Or V est sinusoïdal  $\rightarrow V = V_0 . e^{j.\omega.t}$

$$\vec{\text{div}} \vec{A} + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \mu \cdot V = 0 \quad \rightarrow \quad V = - \text{div } \vec{A} / j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \mu$$

En calculant  $\text{div } \vec{A}$ , on a :

$$V_0 = 1 / j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \mu \left[ j \cdot k \cdot K \cdot \cos\theta / r + K \cdot \cos\theta / r^2 \right] e^{-j \cdot k \cdot r}$$

$$k = 2 \cdot \pi / \lambda \quad \text{et} \quad K = \mu \cdot dl \cdot I / 4 \cdot \pi$$

$$\vec{V} = \vec{I} \cdot dl \cdot \cos\theta / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot j \cdot \omega \left[ 1/r^2 + j \cdot k / r \right] e^{j(\omega t - k \cdot r)}$$

L'expression de  $V$  (potentiel scalaire) reste la même en coordonnées cylindriques et cartésiennes.

### III- Calcul de $\vec{H}$ et $\vec{E}$

#### III-1 Calcul de $\vec{H}$

$$\vec{H} = 1 / \mu \cdot \text{rot } \vec{A}$$

Avec  $\text{rot } \vec{A}$  (en coordonnées sphériques), on trouve  $\vec{H} \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\phi = I \cdot dl \cdot \sin\theta / 4 \cdot \pi \left[ 1/r^2 + j \cdot k / r \right] e^{j(\omega t - k \cdot r)} \end{cases}$

**Remarque :**

Ni  $A$  ni  $B$  ( $H$ ) ne dépend de  $\phi$ ,  $A$  et  $H$  restent les mêmes quand on fait varier  $\phi$ .

#### III-2 Calcul de $\vec{E}$

$$\vec{E} = - \text{grad } V - \delta \vec{A} / \delta t \quad \rightarrow \quad \vec{E} = - \text{grad } V - j \cdot \omega \vec{A}$$

En exprimant  $\text{grad } V$  en coordonnées sphériques, alors on trouve :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = I \cdot dl \cdot \cos\theta / 2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot j \cdot \omega \cdot r^3 \left[ 1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot r / \lambda \right] \cdot e^{j(\omega t - k \cdot r)} \\ E_\theta = I \cdot dl \cdot \sin\theta / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot j \cdot \omega \cdot r^3 \left[ 1 + j \cdot 2 \cdot \pi r / \lambda + 4 \cdot \pi^2 \cdot r^2 / \lambda^2 \right] \cdot e^{j(\omega t - k \cdot r)} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad \text{avec } k = 2 \cdot \pi / \lambda$$

**Remarque :**

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont  $\perp$  puisque  $\vec{E}$  est contenu dans le plan  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

### IV- Intensité des champs au voisinage du doublet

Le voisinage du doublet veut dire que nous avons :  $k \cdot r \ll 1 \rightarrow r \ll \lambda / 2 \cdot \pi$

Les termes  $1/r^2$  et  $1/r^3$  sont prépondérants par rapport à  $1/r$  d'où  $1/r \ll 1/r^2$

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = 2.Q.dl.\cos\theta / 4.\pi.\epsilon.r^3 . e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\theta = Q.dl.\sin\theta / 4.\pi.\epsilon.r^3 . e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad \text{avec } k = 2.\pi / \lambda \text{ et } Q = I / j.\omega$$

$$\vec{H} \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\phi = I.dl.\sin\theta / 4.\pi.r^2 . e^{j(\omega t - k.r)} \end{cases}$$

### Remarque :

$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  est du style  $|S| = \sin(\omega.t - k.r) . \cos(\omega.t - k.r)$ . Dans le temps  $E$  et  $H$  sont déphasés de  $\pi/2$ .

La valeur moyenne  $\langle S \rangle = 0$ .  $\rightarrow$  On a n'a aucun rayonnement de la puissance active mais on a un rayonnement de la puissance réactive : on est dans la **zone de Fresnel**.

En moyenne quand on est près du doublet, la puissance active est nulle :  $\rightarrow$  on a des **ondes sphériques**.

### V- Intensité des champs loin du doublet

Loin du doublet veut dire que nous avons :  $k.r \gg 1 \rightarrow r \gg \lambda / 2.\pi$

Les termes  $1/r$  deviennent prépondérants.

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = j.I.dl.\sin\theta / 2.\epsilon.\lambda.r.c . e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad \text{où } c \text{ est la célérité de l'onde dans le milieu considéré.}$$

$$\vec{H} \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\phi = j.I.dl.\sin\theta / 2.\lambda.r . e^{j(\omega t - k.r)} \end{cases}$$

Quand on est dans le vide, on aura :

$$|\vec{E}| = 60.\pi.I.dl.\sin\theta / \lambda.r$$

**Remarques :**

1- La fonction  $F(\theta) = \pi \cdot dl \cdot \sin\theta / \lambda$  est appelée **fonction caractéristique du doublet**,

2- La puissance active  $|\vec{E}|$  n'est pas nulle au cours d'une période  $\rightarrow$  on a de l'énergie active rayonnée dans la zone active appelée **zone de FRAUNHOFFER** ( transfert de la puissance active ).

On a une onde sphérique qui peut-être assimilée à la limite à une onde plane.

$\vec{k}$  est porté par  $e_r$  ( sens de propagation )

$\vec{E}$  est porté par  $e_\theta$

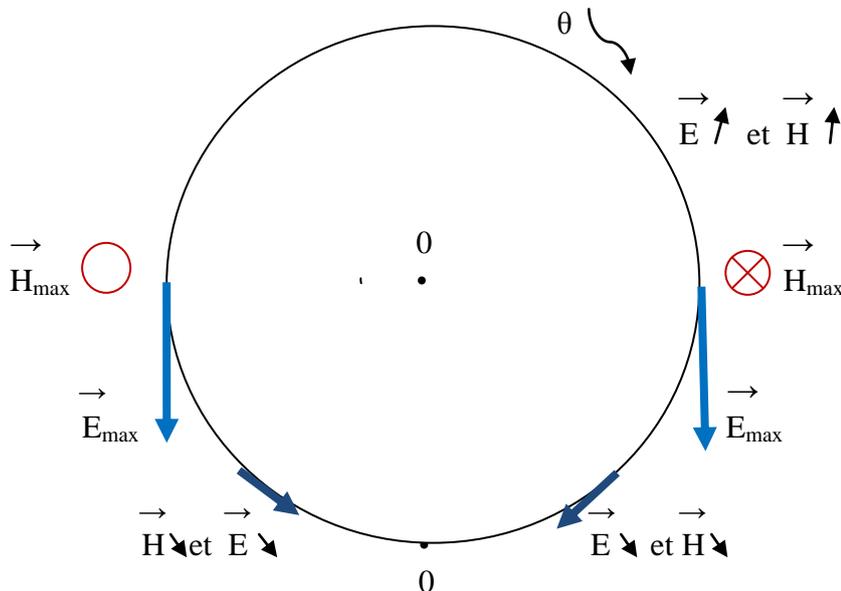
$\vec{H}$  est porté par  $e_\phi$

3- La phase est toujours constante sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Les plans équiphases sont des sphères et plus on s'éloigne de la source et plus le plan tangent à la sphère se confond avec la surface de la sphère.

Pour  $\phi = \text{constante}$ ,  $r = \text{constante}$  et  $\theta$  varie alors :

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  varient en  $\sin\theta$  et changent de sens quand  $\theta$  devient supérieur à  $\pi$  ( $\theta > \pi$ ).

$\vec{E}$  dépend de  $t$ ,  $\theta$  et  $r$ .



## CHAPITRE III : THEORIE SIMPLIFIEE DE L'ETUDE DES ANTENNES

### Généralités :

On appellera aérien d'émission ou antenne tout système matériel siège de perturbation électromagnétique qui rayonne de l'énergie ( par exemple un fil électrique parcouru par un courant électrique ). Il est important de savoir qu'une antenne est une interface entre l'émetteur et le milieu ambiant ou encore un adaptateur d'impédance entre l'impédance interne de l'émetteur et l'impédance caractéristique du milieu. L'impédance d'entrée du système rayonnant est  $Z_0 = R_0 + jX_0$ .

Le diagramme de rayonnement représente la répartition du rayonnement dans l'espace. Il dépend de la structure de l'antenne. Il nous permet de déterminer la directivité du rayonnement → dépend des coordonnées.

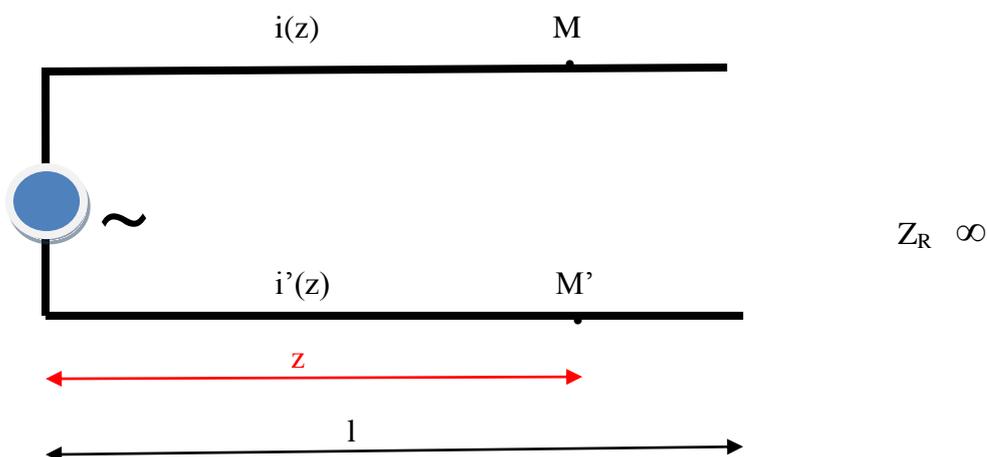
La puissance rayonnée dans une direction est fonction de la puissance totale fournie à l'antenne et également du diagramme de rayonnement.

A partir du moment où on connaît la puissance rayonnée et la diagramme de rayonnement, on peut déterminer le gain en puissance.

Le champ en tout point de l'espace nous permet de déterminer le diagramme de rayonnement, le gain en puissance. L'expression du champ est fonction de la répartition du courant.

### I- Hypothèse de la répartition sinusoïdale de courant

On considère une antenne bifilaire alimentée par un générateur de courant.



$$i(z) = j.v_0 / Z_c . \sin k.(l-z) / \cos k.l$$

$$i(0) = j.v_0 / Z_c . \sin k.l / \cos k.l \quad \rightarrow \quad i(A) = j.v_0 / Z_c . \sin k.(l-z_A) / \cos k.l$$

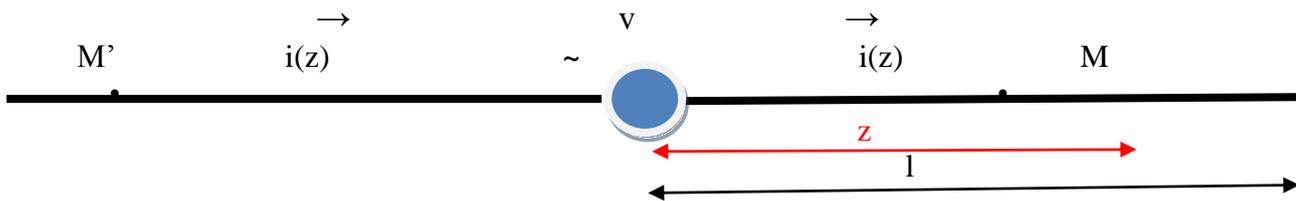
$$i(0) / \sin k.l = j.v_0 / Z_c . 1 / \cos k.l$$

$$\rightarrow \quad i(z) = i(0) . \sin k.(l-z) / \sin k.l \quad \rightarrow \quad i(z) = i(A) . \sin k.(l-z) / \sin k.(l-z_A)$$

Si A est un ventre de courant (amplitude maximale) :

$$i(A) / \sin k(l-z_A) = i_M \quad \rightarrow \quad i(z) = i_M . \sin k(l-z)$$

Si on écarte les deux branches de l'antenne bifilaire :



La répartition sinusoïdale du courant n'a pas changé.

$$i(z) = i_M . \sin k.(l - |z|) \quad \text{on peut alors trouver :}$$

$\rightarrow$  le champ E

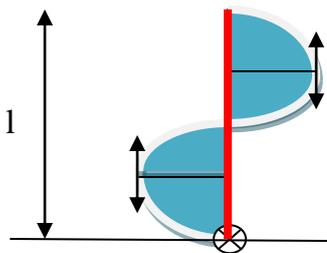
$\rightarrow$  le diagramme de rayonnement

$\rightarrow Z_0$

### Remarques fondamentales pour l'utilisation de la formule

#### A- Antenne filaire alimentée par son extrémité

Exemple d'une antenne en  $\lambda$



$$i(z) = i_M \sin.k.(1 - |z|) \quad z > 0$$

$$i(z) = i_M \sin.k.(1 - z)$$

$$i(\lambda) = i_M \sin.k.(1 - \lambda) = 0$$

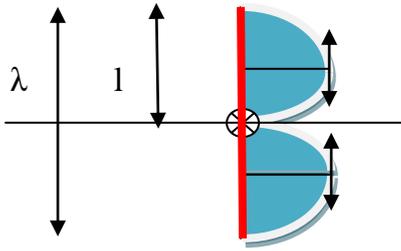
$$i(\lambda/2) = i_M \sin.(2\pi - 2\pi/\lambda . \lambda/2) = 0$$

$$i(\lambda/4) = i_M \sin.(2\pi - 2\pi/\lambda . \lambda/4) = -i_M$$

$$0 \leq z \leq 1$$

## B- Antenne filaire alimentée par son milieu

Exemple d'une antenne en  $\lambda$



$$i(z) = i_M \sin.k.(l - |z|) \quad l = \lambda/2$$

$$-l \leq z \leq +l$$

L'antenne alimentée par son extrémité sera le modèle idéal de l'antenne isolée dans l'espace.

L'antenne alimentée par son milieu sera le modèle idéal d'une antenne verticale au-dessus du sol.

## II- Hauteur effective d'une antenne d'émission

$$E(r, \theta) = 60.\pi.i.dl.\sin\theta / \lambda.r$$

Si on se place dans  $\theta = \pi/2$ , on appellera **hauteur effective** d'une antenne  $\mathbf{h_{eff}}$  la longueur d'un doublet produisant le même champ dans cette direction.

$$E(r, \theta) \rightarrow E(r, \pi/2) = 60.\pi.i_M.h_{eff} / \lambda.r$$

$i_M$  représente le courant en un ventre alimentant l'antenne réelle.

## III- Fonction caractéristique. Diagramme de rayonnement

$$|E(r, \theta)| = 60.\pi.I.dl |\sin\theta| / \lambda.r = 60. I / r |f(\theta)|$$

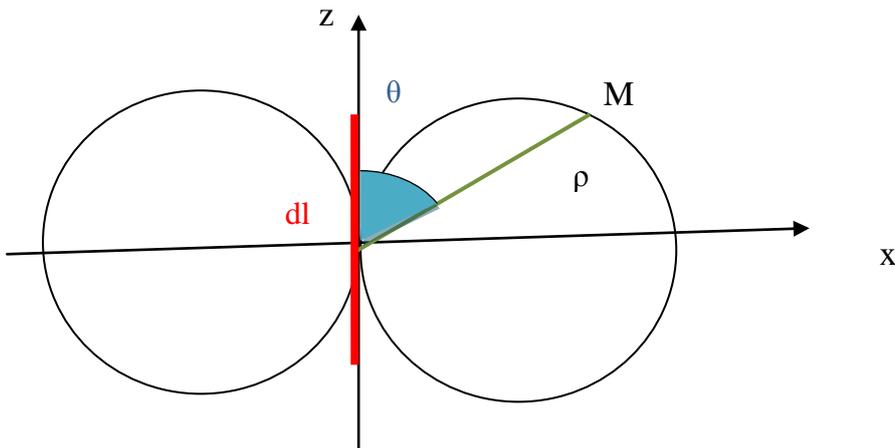
$f(\theta)$  est la fonction caractéristique.

On montre que tout champ rayonné peut se mettre sous la forme :  $60. I / r |f(\theta)|$ .

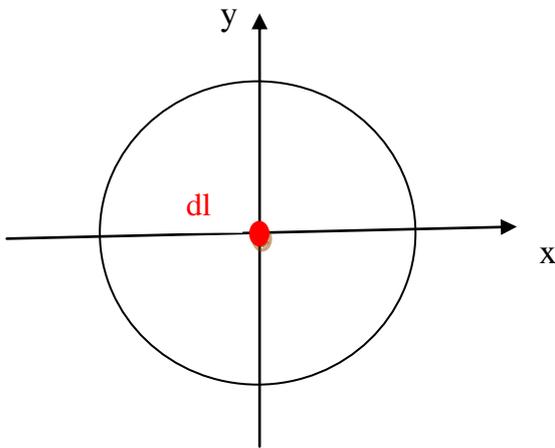
La représentation de cette courbe  $\rho = f(\theta)$  en coordonnées polaires est appelée **diagramme de rayonnement**. Dans le cas général on trace  $\rho = f(\theta, \psi)$ .

$$f(\theta) = \pi.dl.\sin\theta / \lambda$$

On trace le diagramme de rayonnement pour  $\psi = 0$  et  $\theta$  variable.



On trace le diagramme de rayonnement pour  $\theta = \pi/2$ ,  $\psi$  variable et  $\rho = \text{cste}$



Le diagramme de rayonnement est une surface qu'on représente par sa coupe longitudinale et transversale. Le diagramme de rayonnement d'un doublet est un tore dont le rayon est très petit.

**Remarque :**

On parle de la fonction caractéristique pour s'affranchir de la distance  $r$  ou plus exactement le diagramme de rayonnement représente la répartition dans l'espace de l'énergie en fonction des angles à distance constante.

**IV- Résistance de rayonnement**

**IV-1- Définition**

Soient  $W_r$  la puissance totale rayonnée par l'antenne et  $I$  le courant de référence ( $I_M, \dots$ ).

On appelle  $R_r$  résistance de rayonnement de l'antenne la résistance morte qui parcourue par ce même courant dissipe la même puissance :

$$W_r = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2 = R_r / 2 \cdot I_{\text{max}}^2$$

#### IV-2- Relation avec la fonction caractéristique

$$\vec{E}(\theta, \psi) = 60 \cdot (I/r) \cdot \vec{F}(\theta, \psi)$$

$$W_r = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \vec{P} = |\vec{S}| \text{ est le vecteur de Poynting.}$$

$$= 1/120 \cdot \pi \int_S E_{\text{eff}}^2 \cdot dS$$

↑  
vide

$$dS = r \cdot \sin\theta \cdot d\psi \cdot r \cdot d\theta = r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\psi \cdot d\theta \quad \rightarrow \quad \text{le rayonnement se fait sur une sphère.}$$

$$W_r = 1/120 \cdot \pi \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} E_{\text{eff}}^2(\theta, \psi) \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

$$W_r = (1/120 \cdot \pi) \cdot (60^2 \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot r^2 / r^2) \int_{\theta} \int_{\psi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

$$W_r = 30 \cdot I_{\text{eff}}^2 / \pi \int_{\theta} \int_{\psi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

$$W_r = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2$$

$$R_r = 30/\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

#### Cas particulier :

Si le rayonnement est de révolution autour de l'axe Oz :

$$R_r = 30/\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi = 60 \int_{\theta=0}^{\pi} F^2(\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

#### IV-3- Intérêt de Rr

$$W_r = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2$$

$$W_{\text{al}} = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2 + R_j \cdot I_{\text{eff}}^2$$

La résistance de rayonnement sert à définir le rendement :  $\eta = W_r / W_{\text{al}}$

$$\eta = R_r / R_r + R_j$$

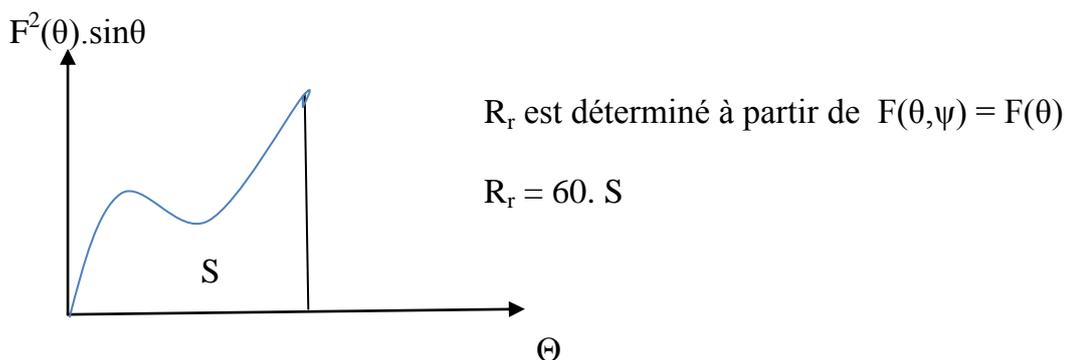
Pour une même antenne, le fait qu'elle soit placée seule dans l'espace ou au-dessus du sol modifie la résistance de rayonnement ( $F(\theta)$  change ainsi que la surface).

#### IV-4- Méthode de calcul de $R_r$

1- Calcul direct

On utilise :  $Si(x) = \int_0^x \sin t \cdot dt / t$  ou  $Ci(x) = \int_0^x \cos t \cdot dt / t$

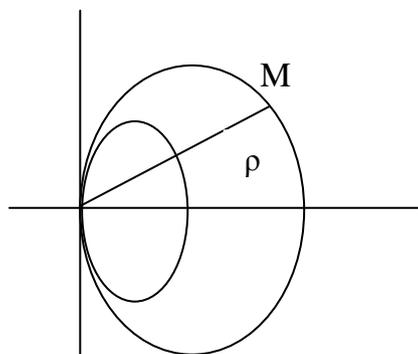
2- Calcul approché : Méthode graphique



3- Abaques

On utilise :  $\rho(\theta) = F(\theta) \cdot \sqrt{\sin\theta}$

$R_r$  est proportionnelle à  $\int \rho^2 \cdot d\theta = S_1$



$S_1$  est l'aire balayée par le rayon vecteur  $\rho$ .

$$R_r = 120.S_1$$

$$\rho(\theta) = A \cdot \sqrt{\sin\theta}$$

On prend différentes valeurs de  $\theta$  et on calcule  $\rho(\theta)$ .

$$\theta_1 \rightarrow F(\theta_1) \rightarrow A$$

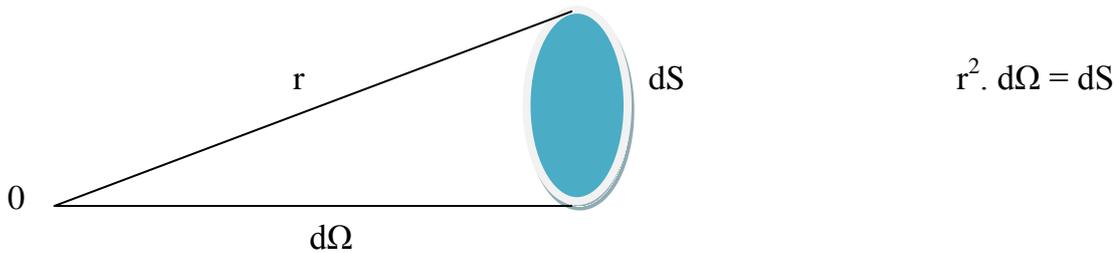
Une résistance de rayonnement n'est jamais calculée justement.

#### V- Gains d'une antenne

##### V-1 Intensité de rayonnement

On appellera intensité de rayonnement notée  $U(\theta, \psi)$  dans une direction donnée  $\delta$ , la puissance rayonnée par unité d'angle solide.

$$U(\theta, \psi) = dW / d\Omega \quad (\text{w/st}) \quad \text{or} \quad dW = P \cdot dS$$



$$dW = P \cdot dS = P \cdot r^2 \cdot d\Omega$$

$$U(\theta, \psi) = dW / d\Omega = P \cdot r^2 \quad P \text{ dépend de } 1/r^2 \rightarrow U(\theta, \psi) \text{ ne dépend plus de } r.$$

### V-2 Gain absolu

On définit le gain absolu d'une antenne par rapport à une antenne de référence qui est la source

Isotopique  $\rightarrow$  le diagramme de rayonnement de cette source est une sphère.

On considère une antenne A :  $U(\theta, \psi) = P \cdot r^2$

$$W = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot P_0 \quad P_0 \text{ est le vecteur de poynting propre à la surface.}$$

$$= 4 \cdot \pi \cdot U_0(\theta, \psi) \rightarrow U_0(\theta, \psi) = W / 4 \cdot \pi$$

On appelle le gain absolu d'une antenne  $G_0 = U / U_0 = P / P_0$

$$G_0 = P / P_0 = (E_{\text{eff}}^2 / 120 \cdot \pi) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2 / W) = E_{\text{eff}}^2 \cdot r^2 / 30 \cdot W$$

### V-3 Gain en champ d'une antenne

On appelle gain en champ dans une direction  $\delta$  le rapport des valeurs efficaces des champs rayonnés dans cette direction à la même distance de l'antenne A et de l'antenne de référence et toutes les alimentées par la même puissance.

$$g_c = E_{\text{eff}}(\theta, \psi) / E_{\text{effR}} |_{W=Cte}$$

L'antenne de référence peut-être soit

- { un doublet
- { une antenne filaire
- { une source isotropique

On considère que l'antenne de référence est une source isotropique :

$$\text{On a } P = E_{\text{eff}}^2 / 120 \cdot \pi$$

$$P_0 = E_{0\text{eff}}^2 / 120 \cdot \pi$$

$$g_c = \sqrt{120 \cdot \pi \cdot P / 120 \cdot \pi \cdot P_0} = \sqrt{P / P_0} = \sqrt{G_0}$$

### Remarque :

On définit le gain en champ exprimé en décibels (dB) comme étant :

$$g_c \text{ (dB)} = 20 \cdot \log E_{\text{eff}} / E_{\text{effR}}$$

$$G_0 \text{ (dB)} = 10 \cdot \log P/P_0$$

Dans le cas où la source de référence est la source isotropique, alors ces deux gains sont égaux.

### V-4 Gain en puissance

On appelle gain en puissance dans une direction donnée le rapport de la puissance à fournir à une antenne pour produire un champ donné dans la direction considérée, par rapport à la puissance de l'antenne considérée pour fournir le même champ, à la même direction et à la même distance.

$$g_P = W_R / W \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} E(r_0, \theta_0, \psi_0) \\ E(r_0, \theta_0, \psi_0) \\ E(r_0, \theta_0, \psi_0) \end{array}$$

### V-5 Expression générale du gain

$$G_0 = E_{\text{eff}}^2 \cdot r^2 / 30 \cdot W$$

$$E_{\text{eff}} = (60 \cdot I_{\text{eff}} / r) \cdot F(\theta, \psi)$$

$$W = R_r \cdot I_{\text{eff}}^2$$

$$G_0 = 60^2 \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot F^2(\theta, \psi) / 30 \cdot r^2 \cdot R_r \cdot I_{\text{eff}}^2 = 120 \cdot F^2(\theta, \psi) / R_r$$

$$G_0 = 120 \cdot \pi \cdot F^2(\theta, \psi) / 30 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi = 4 \cdot \pi \cdot F^2(\theta, \psi) / \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi$$

$$W_r \text{ est la puissance rayonnée } \int_S P \cdot dS$$

$P = |E \wedge H|$  est la puissance rayonnée par unité de surface.

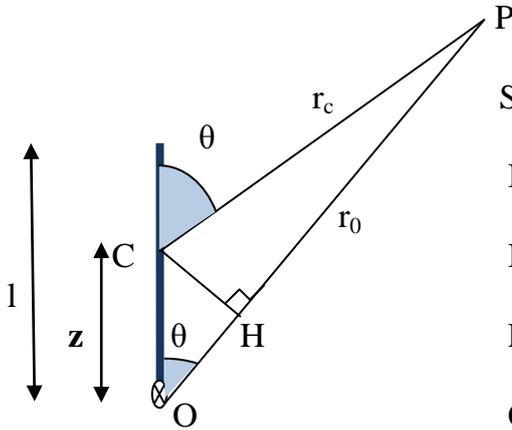
$U(\theta, \psi) = dW / d\Omega \rightarrow W$  est la puissance d'alimentation de l'antenne.

En décibels les 3 gains définis précédemment sont égaux quand on prend la source isotropique comme référence.

## CHAPITRE IV : ETUDE DE L'ANTENNE FILAIRE

### A- ANTENNES ASSYMETRIQUES

#### I- Champ créé par une antenne rectiligne isolée dans l'espace



Soit une antenne de longueur  $l$  alimentée par une extrémité

$I_0$  : amplitude du courant en 0

$I_M$  : amplitude du courant en un ventre

P : point quelconque de l'espace

C : point sur l'antenne d'ordonnée  $z$

On considère un champ créé en un point P très lointain faisant un angle  $\theta$  avec l'antenne.

On suppose une répartition sinusoïdale du courant :

$$i_c = i_0 \sin k \cdot (l-z) / \sin k \cdot l \quad i_0 = I_0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i_c = i_M \sin k \cdot (l-z) / \sin k \cdot l \quad i_M = I_M \cdot e^{j\omega t}$$

$$OP = r_0$$

$$CP : r_c$$

On suppose que  $CP \parallel OP$  car P est loin de l'antenne  $\rightarrow$  on retrouve alors  $\theta$  en C.

$dE_0$  est le module du champ créé par un doublet centré en O

$$dE_0 = - (j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot r_0) \cdot i_0 \cdot e^{-jkr_0} \sin\theta \cdot dz$$

$dE_c$  est le module du champ créé par un doublet centré en C

$$dE_c = - (j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot r_c) \cdot i_c \cdot e^{-jkr_c} \sin\theta \cdot dz$$

$$r_c = r_0 - OH = r_0 - z \cdot \cos\theta$$

$$dE_c = - \left[ j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot (r_0 - z \cdot \cos\theta) \right] \cdot i_c \cdot e^{-j \cdot k \cdot (r_0 - z \cdot \cos\theta)} \sin\theta \cdot dz$$

## Approximation :

La distance OH n'intervient que très peu dans le terme de l'amplitude et qu'on peut le négliger, par contre du point de vue phase, les phases créées en O et en C sont différentes de  $-\mathbf{j.k.z.cos\theta}$ .

$$dE_c = - (j.60.\pi / \lambda. r_0) \cdot i_c . e^{-j.k.(r_0 - z.cos\theta)} \sin\theta. dz$$

$r_0$  est la référence, on pose  $r_0 = r$ .

$$dE_c = - (j.60.\pi / \lambda. r) \cdot i_M . \text{sinc}(1-z) . e^{-j.k.(r - z.cos\theta)} \sin\theta. dz$$

Le champ total résultant :

$$E(P) = - (j.60.\pi / \lambda. r) \cdot i_M . e^{-j.k.r} . \sin\theta \int_0^1 \text{sinc}(1-z) . e^{j.k.z.cos\theta} . dz = - (j.60.\pi / \lambda. r) \cdot i_M . e^{-j.k.r} . \sin\theta . \mathcal{K}$$

On fait le calcul de  $\mathcal{K}$  dans le cas d'une antenne accordée  $l = n.\lambda/2$ .

### I-1 Nombre impair de demi longueur d'onde ( $\lambda/2$ )

$$n = (2n+1) \rightarrow l = (2n+1).\lambda/2 \rightarrow k.l = (2\pi/\lambda).(2n+1).\lambda/2 = (2n+1).\pi = n.\pi$$

$$\sin k.(1-z) = \sin [(2\pi+1).\pi - k.z] = (-1)^{2n+1} . \sin(-kz) = (-1)^{2n+2} . \text{sinc}z = \text{sinc}z$$

$$\mathcal{K} = \int_0^1 \text{sinc}z . e^{j.k.z.cos\theta} . dz = \int_0^1 [(e^{j.k.z} - e^{-j.k.z}) / 2j] . e^{j.k.z.cos\theta} . dz = 1/2j \int_0^1 (e^{j.k.z(1+\cos\theta)} - e^{-j.k.z(1-\cos\theta)}) . dz$$

$$\mathcal{K} = 1/2j . \left\{ \left| e^{j.k.z(1+\cos\theta)} / j.k(1+\cos\theta) \right|_0^1 - \left| e^{-j.k.z(1-\cos\theta)} / -j.k(1-\cos\theta) \right|_0^1 \right\}$$

$$\mathcal{K} = 1/2j . \left[ (e^{j.k.l(1+\cos\theta)} - 1) / j.k(1+\cos\theta) + (e^{-j.k.l(1-\cos\theta)} - 1) / j.k(1-\cos\theta) \right]$$

$$\mathcal{K} = -1/2k . \left[ (e^{j.k.l(1+\cos\theta)} - 1) / (1+\cos\theta) + (e^{-j.k.l(1-\cos\theta)} - 1) / (1-\cos\theta) \right]$$

$$j.k.l(1+\cos\theta) - 1 = e^{j.k.l} . e^{j.k.l \cos\theta} - 1 = e^{j.(2n+1).\pi} . e^{j.k.l \cos\theta} - 1 = -e^{j.k.l \cos\theta} - 1$$

$$\mathcal{K} = -1/2k . \left[ (e^{j.k.l \cos\theta} + 1) / (1+\cos\theta) + (e^{j.k.l \cos\theta} + 1) / (1-\cos\theta) \right] = 1/2k . \sin^2\theta \left[ 2e^{j.k.l \cos\theta} + 2 \right]$$

$$\mathcal{K} = (e^{j.k.l.\cos\theta} + 1) / k.\sin^2\theta = 2. e^{j.k.l.\cos\theta/2} / k.\sin^2\theta . (e^{j.k.l.\cos\theta/2} + (e^{-j.k.l.\cos\theta/2})) / 2$$

$$\mathcal{K} = \lambda. e^{j.k.l.\cos\theta/2} . \cos ( k.l.\cos\theta/2 ) / \pi.\sin^2\theta$$

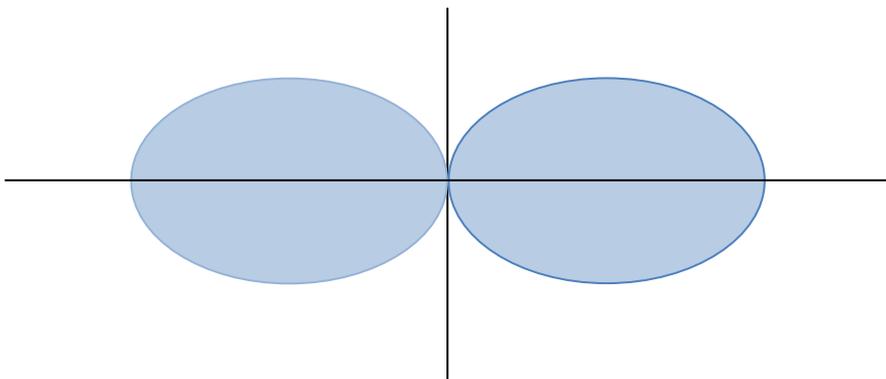
$$E(P) = - (j.60.\pi / \lambda. r. \pi.\sin^2\theta) . I_M. e^{-j.k.r} . \sin\theta. \lambda. e^{j.k.l.\cos\theta/2} . \cos ( k.l.\cos\theta/2 )$$

$$E(P) = - (j.60 / r.\sin\theta) . I_M. e^{j.k.r} . e^{j.k.l.\cos\theta/2} . \cos ( k.l.\cos\theta/2 ) e^{j.(\omega t - k.r)}$$

$$|E(P)| = (60. I_M / r) | \cos ( k.l.\cos\theta/2 ) / \sin\theta |$$

$$F(\theta) = \cos ( k.l.\cos\theta/2 ) / \sin\theta = \cos [ (2m+1).\pi / 2 . \cos\theta ] / \sin\theta$$

On serait arrivé au même résultat si au lieu de prendre la référence en un ventre, on l'avait prise en un nœud (0). Le terme  $e^{j.k.l.\cos\theta/2}$  ne dépend que du choix de l'origine et aurait disparu si on avait pris l'origine au milieu de l'antenne. Le calcul est fondamental pour la suite du raisonnement, mais il n'est pas le seul. Pour  $l = \lambda/2$ , on obtient un diagramme de rayonnement très semblable de celui du doublet.



### I-1 Nombre pair de demi longueur d'onde ( $\lambda/2$ )

$$n = 2m \quad \rightarrow \quad l = 2m.\lambda/2 \quad \rightarrow \quad k.l = (2\pi/\lambda).(2m.\lambda/2) = 2m.\pi = n.\pi$$

$$\sin k.(1-z) = \sin (2m.\pi - k.z) = (-1)^{2m} . \sin(-kz) = - \sin kz$$

$$\mathcal{K} = (2j / k.\sin^2\theta) = e^{j.k.l.\cos\theta/2} . \sin(k.l.\cos\theta/2)$$

$$F(\theta) = \sin ( k.l.\cos\theta/2 ) / \sin\theta = \sin ( 2m.\pi.\cos\theta/2 ) / \sin\theta$$



$$i_c = i_{c'} = I_M \cdot \sin k \cdot (1+d-z)$$

$$r_c = r_A - AH = r_A - (z-d) \cdot \cos\theta$$

$$r_{c'} = r_A + C'H' = r_A + (z+d) \cdot \cos\theta$$

$$dE_c + dE_{c'} = - (j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot r) \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot \sin k \cdot (1+d-z) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot (r_A + d \cdot \cos\theta)} \cdot [ e^{jk \cdot z \cdot \cos\theta} + e^{-jk \cdot z \cdot \cos\theta} ]$$

$$E = - (j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot r) \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t - k \cdot (r_A + d \cdot \cos\theta)} \cdot 2 \cdot \int_d^{d+1} \sin k \cdot (1+d-z) \cdot \cos(k \cdot z \cdot \cos\theta) \cdot dz$$

$$\mathcal{K} = 2 \cdot \int_d^g \sin k \cdot (g-z) \cdot \cos(k \cdot z \cdot \cos\theta) \cdot dz \quad \text{On pose } g = d + 1$$

$$\mathcal{K} = \int_d^g \left\{ \sin [ k \cdot g - k \cdot z \cdot (1 - \cos\theta) ] + \sin [ k \cdot g - k \cdot z \cdot (1 + \cos\theta) ] \right\} dz$$

$$\mathcal{K} = \left[ \cos [ k \cdot g - k \cdot z \cdot (1 - \cos\theta) ] / k(1 - \cos\theta) + \cos [ k \cdot g - k \cdot z \cdot (1 + \cos\theta) ] / k(1 + \cos\theta) \right]_d^g$$

$$\mathcal{K} = \left[ \cos [ k \cdot g - k \cdot g \cdot (1 - \cos\theta) ] - \cos [ k \cdot g - k \cdot d \cdot (1 - \cos\theta) ] \right] / k(1 - \cos\theta)$$

$$+ \left[ \cos [ k \cdot g - k \cdot g \cdot (1 + \cos\theta) ] - \cos [ k \cdot g - k \cdot d \cdot (1 + \cos\theta) ] \right] / k(1 + \cos\theta)$$

$$\mathcal{K} = \left[ \cos [ k \cdot (d+1) \cos\theta ] - \cos [ k \cdot 1 + k \cdot d \cos\theta ] \right] / k(1 - \cos\theta)$$

$$+ \left[ \cos [ k \cdot (d+1) \cos\theta ] - \cos [ k \cdot 1 - k \cdot d \cdot \cos\theta ] \right] / k(1 + \cos\theta)$$

$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \left[ \cos(k \cdot 1 \cdot \cos\theta) - \cos k \cdot 1 \right] + \sin(k \cdot d \cdot \cos\theta) \left[ \cos\theta \cdot \sin k \cdot 1 - \sin(k \cdot 1 \cdot \cos\theta) \right] \right\}$$

### Applications :

$$\text{I-1 Si } l = (2n+1) \cdot \lambda / 2 \text{ et base à } d \text{ du sol} \quad \rightarrow \quad k \cdot l = (2n+1) \cdot \pi$$

$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \left[ \cos((2n+1)\pi \cdot \cos\theta) + 1 \right] - \sin(k \cdot d \cdot \cos\theta) \cdot \sin((2n+1)\pi \cdot \cos\theta) \right\}$$

$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \cdot \cos((2n+1)\pi \cdot \cos\theta) - \sin(k \cdot d \cdot \cos\theta) \cdot \sin((2n+1)\pi \cdot \cos\theta) + \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \right\}$$

$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos \left[ k \cdot \cos\theta \cdot (l+d) \right] + \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \right\} \quad h = d + l/2$$

$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos \left[ k \cdot \cos\theta \cdot (h+1/2) \right] + \cos \left[ k \cdot \cos\theta \cdot (h-1/2) \right] \right\}$$

$$\mathcal{K} = (4/k \cdot \sin^2\theta) \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta) \cdot \cos(k \cdot l/2 \cdot \cos\theta)$$

$$\mathcal{K} = (4/k \cdot \sin^2\theta) \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta) \cdot \cos \left[ (2n+1)\pi/2 \cdot \cos\theta \right]$$

$$E = - (j \cdot 60 \cdot \pi / \lambda \cdot r) \cdot I_M \cdot e^{j[\omega \cdot t - k(r_A + d \cdot \cos\theta)]} \cdot 2 \cdot (4 \cdot \lambda/2 \cdot \pi \cdot \sin\theta) \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta) \cdot \cos \left[ (2n+1)\pi/2 \cdot \cos\theta \right]$$

$$|E|_{C,V} = (60 \cdot I_M / r) \cdot | \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta) \cdot 2 \cdot \cos \left[ (2n+1)\pi/2 \cdot \cos\theta \right] / \sin\theta |$$

$$F_1(\theta) = 2/\sin\theta \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta) \cdot \cos \left[ (2n+1)\pi/2 \cdot \cos\theta \right]$$

$$F_i \left[ (2n+1)\lambda/2 \right] = \cos \left[ (2n+1)\pi/2 \cdot \cos\theta \right]$$

$$F_1(\theta) = F_i \left[ (2n+1)\lambda/2 \right] (\theta) \cdot 2 \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta)$$

Cette fonction est valable pour toute antenne verticale accordée sur  $(2n+1)\lambda/2$ .

En conclusion, on peut dire que par l'antenne verticale accordée sur  $(2n+1)\lambda/2$ , la fonction caractéristique est égale à la fonction caractéristique de l'antenne isolée de même longueur multipliée par  $2 \cdot \cos(k \cdot h \cdot \cos\theta)$ .

Si on se place à  $\theta = \pi/2 \rightarrow$  la directivité de l'antenne augmente.

$$\mathbf{I-2 \text{ Si } l = 2n \cdot \lambda/2 \text{ et base à } d \text{ du sol } \rightarrow \mathbf{k \cdot l = 2n \cdot \pi}$$

On fait le même calcul et on obtient :

$$F_2(\theta) = F_i \left[ 2n \cdot \lambda/2 \right] (\theta) \cdot 2 \cdot \sin(k \cdot h \cdot \cos\theta)$$

$h$  le même que précédemment et suivant la longueur de l'antenne l'influence du sol est différente.

$$\mathbf{I-3 \text{ Antenne avec base au sol } \rightarrow \mathbf{d = 0}$$

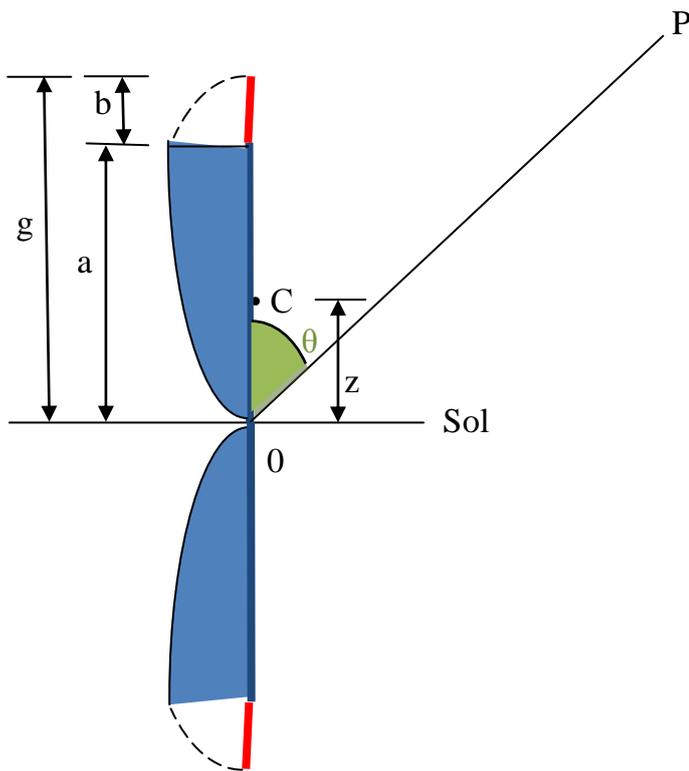
$$\mathcal{K} = 2/k \cdot \sin^2\theta \left\{ \cos(k \cdot d \cdot \cos\theta) \left[ \cos(k \cdot l \cdot \cos\theta) - \cos k \cdot l \right] + \sin(k \cdot d \cdot \cos\theta) \left[ \cos\theta \cdot \sin k \cdot l - \sin(k \cdot l \cdot \cos\theta) \right] \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(k.d.\cos\theta) = \cos 0 = 1 \\ \sin(k.d.\cos\theta) = \sin 0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \mathcal{K} = 2/k. \left[ \cos(k.l.\cos\theta) - \cos k.l \right] / \sin^2\theta$$

$$|E|_{c,v} = (60.I_M/r) \cdot \left[ \cos(k.l.\cos\theta) - \cos k.l \right] / \sin\theta$$

### III- Antenne chargée avec base au sol

#### III-1 expression du champ



On prolonge fictivement (pointillé) l'antenne pour avoir un nœud :

$$g = a + b$$

On regarde ce qui se passe dans la direction  $\theta$

Grandeurs  $g, a, b \rightarrow$  grandeurs électriques :

$$G = k.g = 2.\pi.g / \lambda \rightarrow \text{rd, gr}$$

$$A = k.a = 2.\pi.a / \lambda$$

$$B = k.b = 2.\pi.b / \lambda$$

$$G = A + B$$

$$i_C = I_M \cdot \sin k.(g - z) \cdot e^{j\omega t}$$

$$dE_c = (-j.60.\pi / \lambda.r) \cdot dz \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j\omega t} \cdot \sin k(g - z) \cdot e^{-jk(r-z.\cos\theta)}$$

$$dE_{c'} = (-j.60.\pi / \lambda.r) \cdot dz \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j\omega t} \cdot \sin k(g - z) \cdot e^{-jk(r+z.\cos\theta)}$$

$$dE_c + dE_{c'} = (-j.60.\pi / \lambda.r) \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j(\omega t - kr)} \cdot \sin k(g - z) \cdot \cos(k.z.\cos\theta) \cdot dz$$

$$E = (-j.60.\pi / \lambda.r) \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j(\omega t - kr)} \cdot \int_0^a 2 \cdot \sin k(g - z) \cdot \cos(k.z.\cos\theta) \cdot dz$$

$$\int_0^a 2 \cdot \sin k(g - z) \cdot \cos(k.z.\cos\theta) \cdot dz = \lambda / \pi \cdot \sin^2\theta \left[ \cos B \cdot \cos(A.\cos\theta) - \cos G - \cos\theta \cdot \sin B \cdot \sin(A.\cos\theta) \right]$$

$$|E|_v = (-j.60.\pi / \lambda.r) \cdot \sin\theta \cdot I_M \cdot e^{j(\omega t - kr)} \cdot \lambda / \pi \cdot \sin^2\theta \left[ \cos B \cdot \cos(A.\cos\theta) - \cos G - \cos\theta \cdot \sin B \cdot \sin(A.\cos\theta) \right]$$

$$|E|_v = (-j.60 / r \cdot \sin\theta) \cdot I_M \cdot e^{j(\omega t - kr)} \cdot \left[ \cos B \cdot \cos(A.\cos\theta) - \cos G - \cos\theta \cdot \sin B \cdot \sin(A.\cos\theta) \right]$$

$$\vec{E}_{C,V} = 60 \cdot I_M / r \left| \left[ \cos B \cdot \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos G - \cos \theta \cdot \sin B \cdot \sin(A \cdot \cos \theta) \right] / \sin \theta \right|$$

$$F(\theta) = \left[ \cos B \cdot \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos G - \cos \theta \cdot \sin B \cdot \sin(A \cdot \cos \theta) \right] / \sin \theta$$

**Remarque :**

Ce calcul correspond à une réalité car dans le cas où l'antenne n'est pas chargée  $B=0$ .

$$F(\theta) = \left[ \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos A \right] / \sin \theta = \left[ \cos(k \cdot l \cdot \cos \theta) - \cos k \cdot l \right] \sin \theta \quad A = k \cdot a = k \cdot l$$

### III-2 Champs particuliers

$$F(\theta) = \left[ \cos B \cdot \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos G - \cos \theta \cdot \sin B \cdot \sin(A \cdot \cos \theta) \right] / \sin \theta$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot a / \lambda \quad B = 2 \cdot \pi \cdot b / \lambda \quad G = A + B$$

#### a- Champ au voisinage du sol

$$E(\theta) = 60 \cdot I_M \cdot F(\theta) / r \quad \rightarrow \quad E(\theta=\pi/2) \quad \text{au voisinage du sol}$$

$$F(\theta=\pi/2) \quad \rightarrow \quad E(\theta=\pi/2) = 60 \cdot I_M / r \cdot \left[ \cos B - \cos G \right] / 1$$

$$E(\theta=\pi/2) = 60 \cdot I_M / r \cdot \left[ \cos B - \cos G \right]$$

On donnera le rapport entre  $E(\theta)$  et  $E(\theta=\pi/2)$

#### b- Antenne chargée

$$E(\theta) / E(\pi/2) = \left[ \cos B \cdot \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos G - \cos \theta \cdot \sin B \cdot \sin(A \cdot \cos \theta) \right] / \sin \theta \cdot \left[ \cos B - \cos G \right]$$

Il n'y a que deux variables A et B (exprimées en degrés)

Il existe des courbes tracées qui pour  $\lambda$  fixé, on trace alors :

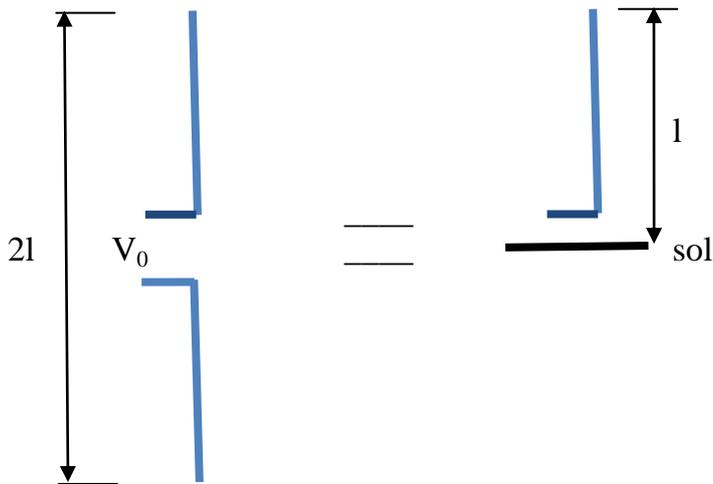
$$E(\theta) / E(\pi/2) \quad \rightarrow \quad [ \text{Pour A constante et B variable ou B constante et A variable} ]$$

#### c- Antenne non chargée $\rightarrow B=0$ et $G=A$

$$E(\theta) / E(\pi/2) = \left[ \cos(A \cdot \cos \theta) - \cos A \right] / \sin \theta \cdot \left[ 1 - \cos A \right] \quad \rightarrow \quad \text{Il existe des abaques}$$

## B- ANTENNES SYMETRIQUES

### I- Antenne symétrique isolée dans l'espace



Cette antenne est équivalente à une antenne alimentée par son milieu.

D'après le principe des images électriques, une antenne symétrique de longueur  $2l$  isolée dans l'espace présente le même rayonnement qu'une antenne assymétrique de longueur  $l$  audessus du sol.

La fonction caractéristique s'écrit donc pour tout  $l$  :

$$F_i(\theta) = \left[ \cos(k.l.\cos\theta) - \cos k.l \right] / \sin\theta$$

$l$  ne représente que la demi longueur de l'antenne.

$$\text{I-1} \quad l = (2n + 1).\lambda / 4$$

$$k.l = (2n + 1).\lambda / 4 . 2.\pi / \lambda = (2n + 1). \pi / 2$$

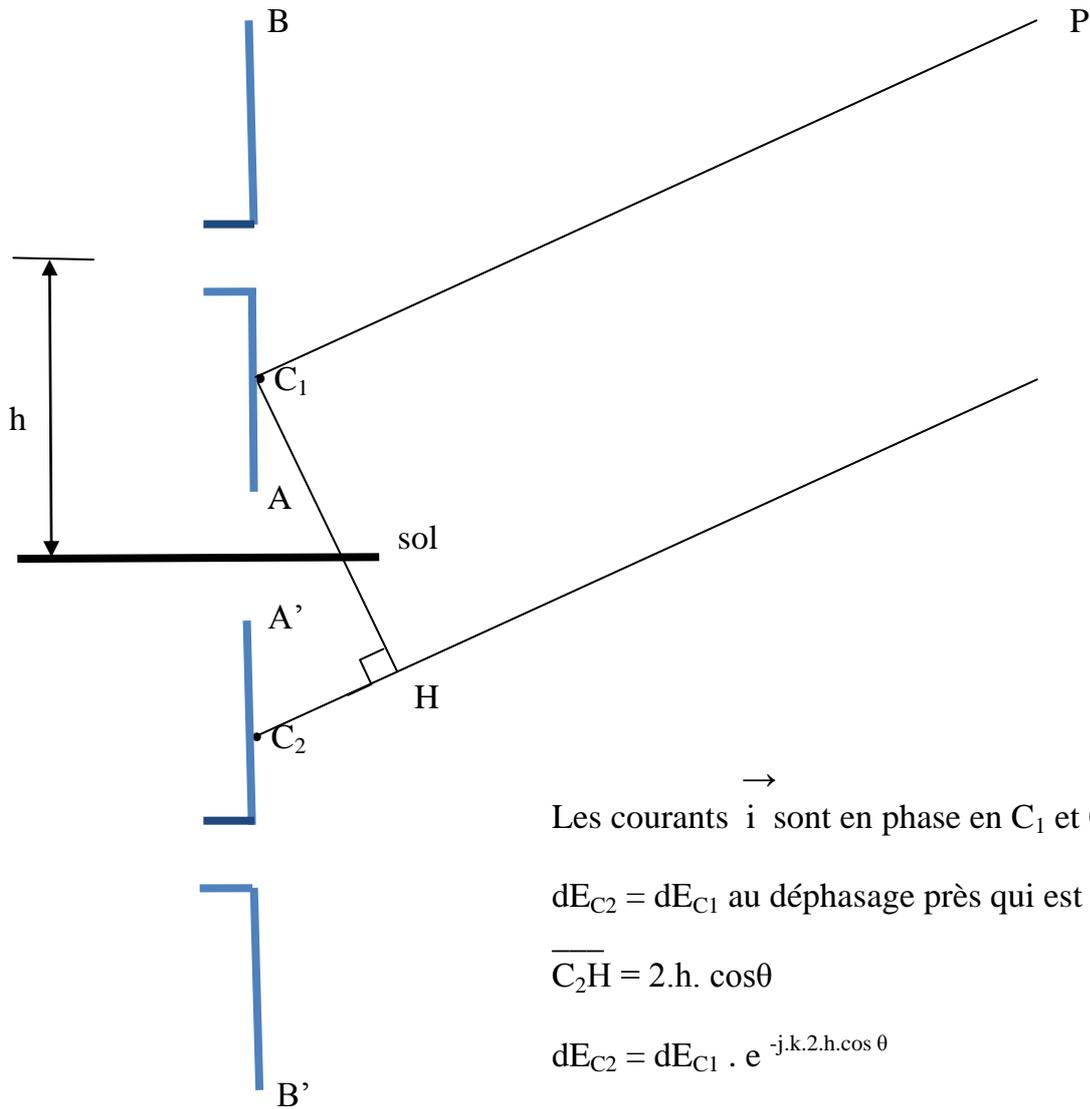
$$F_i(\theta) = \cos [ (2n+1).\pi/2 . \cos\theta ] / \sin\theta$$

$$\text{I-2} \quad l = (2n + 1).\lambda / 2$$

$$k.l = (2n + 1).\lambda / 2 . 2.\pi / \lambda = (2n + 1). \pi$$

$$F_i(\theta) = \left[ \cos [(2n+1).\pi . \cos\theta] + 1 \right] / \sin\theta$$

## II- Antenne symétrique verticale au-dessus du sol



$$dE = dE_{C_1} + dE_{C_2} = dE_{C_1} [1 + e^{-j.k.2.h.\cos\theta}] = dE_{C_1} \cdot e^{-j.k.h.\cos\theta} [e^{j.k.h.\cos\theta} + e^{-j.k.h.\cos\theta}]$$

$$dE = 2 \cdot dE_{C_1} \cdot \cos(k.h.\cos\theta) \cdot e^{-j.k.h.\cos\theta}$$

$$|E|_{C,V} = |E_{C_1}|_{C,V} \cdot 2 \cdot \cos(k.h.\cos\theta)$$

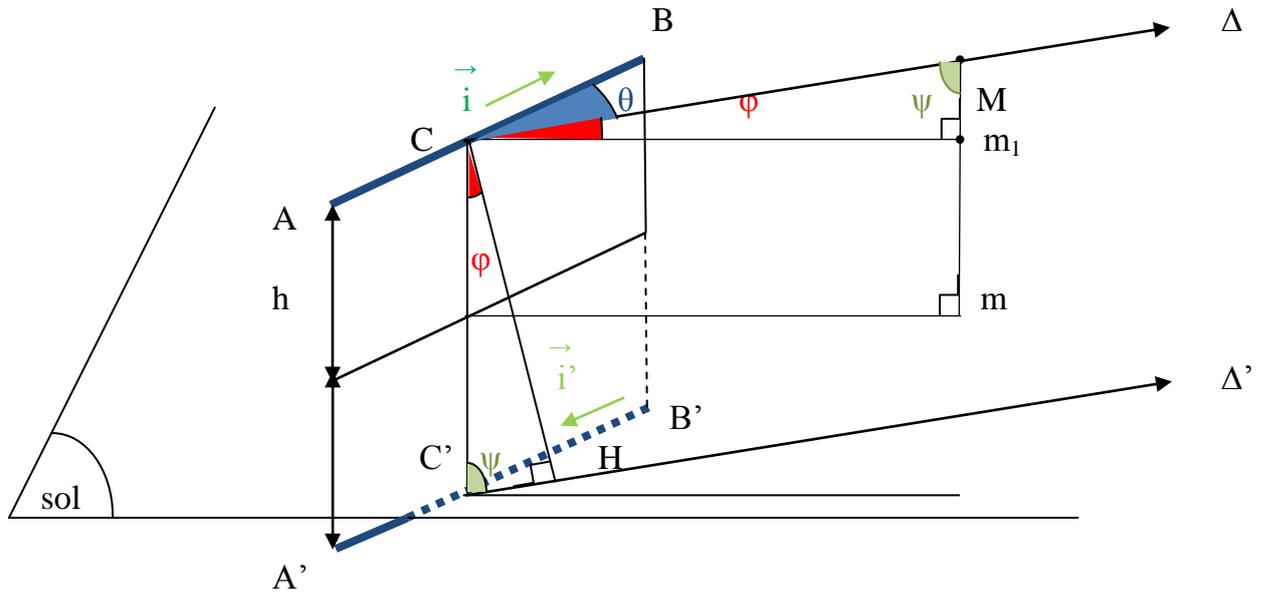
$$F(\theta) = F_i(\theta) \cdot 2 \cdot \cos(k.h.\cos\theta)$$

Contrairement au cas de l'antenne filaire assymétrique verticale au-dessus du sol, la fonction caractéristique représentant la présence du sol est indépendante de la longueur de l'antenne.

$$2 \cdot \cos(k.h.\cos\theta) = f(\theta) \quad \rightarrow \quad \text{dû à la présence du sol.}$$

# C- ANTENNES FILAIRES PARALLELE AU SOL

## I- Etude générale



$m$  projection de  $M$  sur le sol,

$m_1$  projection de  $M$  sur un plan // au sol et passant par  $C$ ,

$dE_{C'} = - dE_C e^{-jkC'H}$  car le courant est inversé,

$$\varphi = (\Delta, Cm_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi = \widehat{CMm} \\ \psi = \widehat{CC'H} \end{array} \right\} \text{angles à côtés //}$$

$$C'H = 2.h.\sin\varphi$$

$$dE_{C'} = - dE_C e^{-j.2.k.h.\sin\varphi},$$

$$dE = dE_C + dE_{C'} = dE_C (1 - e^{-j.2.k.h.\sin\varphi}),$$

$$E = E_C (1 - e^{-j.2.k.h.\sin\varphi})$$

$E_C$  est le champ total rayonné par une antenne isolée dans l'espace.

$$E = E_C \cdot e^{-j.k.h.\sin\varphi} \cdot 2j \cdot \sin(k.h.\sin\varphi)$$

$$|E|_{C,V} = |E_C|_{C,V} \cdot 2 \cdot |\sin(k.h.\sin\varphi)|$$

Si j'appelle  $F_1(\theta)$  la fonction caractéristique à  $|E_C|_{C,V}$ , alors

$$F(\theta) = F_1(\theta) \cdot 2 \cdot \sin(k.h.\sin\varphi) = F_1(\theta) \cdot f(\varphi) \text{ où } f(\varphi) = 2 \cdot \sin(k.h.\sin\varphi)$$

La fonction caractéristique globale se présente sous la forme de deux fonctions caractéristiques :

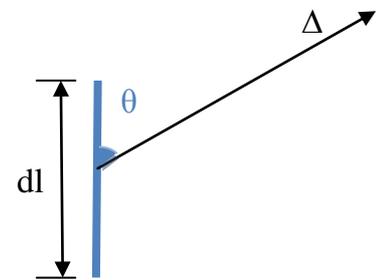
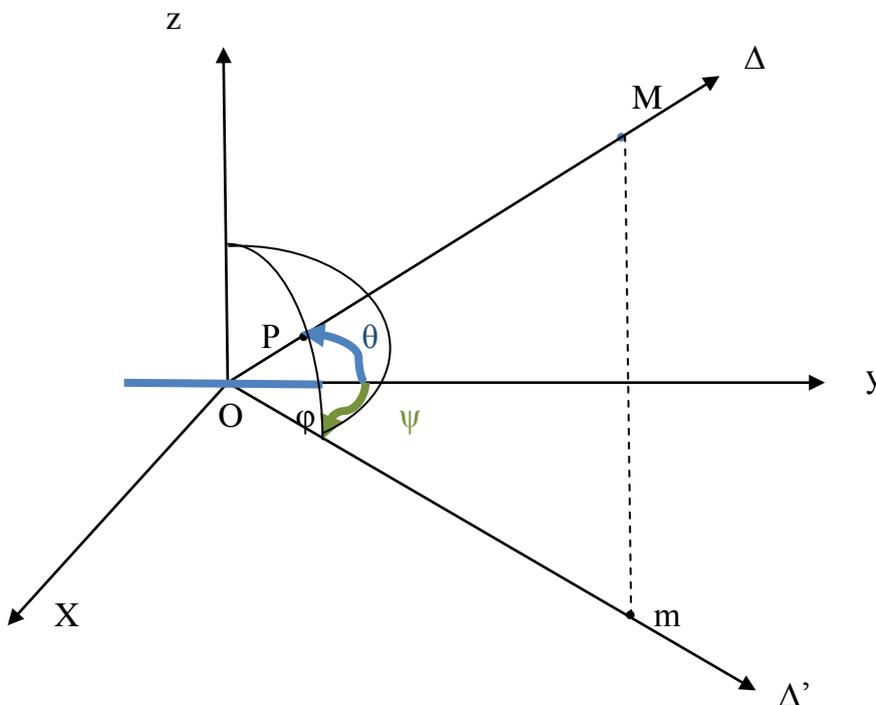
Une fonction caractéristique d'une antenne isolée verticale  $\mathbf{x}$  une fonction dépendant de la hauteur  $\mathbf{h}$

**Remarque :**

Cette fonction  $f(\varphi)$  introduit deux directions privilégiées:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 \rightarrow E(F) = 0 \\ \varphi_M \rightarrow E(F) \text{ max.} \end{array} \right\} \text{ Ceci est dû uniquement à la présence du sol c-à-d } \mathbf{f}$$

### III- Cas d'une antenne demi-onde



$\theta$  n'est pas un angle du système de coordonnées sphériques.

On projette OP sur Oy  $\rightarrow OP \cdot \cos\theta = OP \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi$

car  $\cos\theta = \cos\varphi \cdot \cos\psi$

Dans le cas d'une antenne demi-onde isolée :

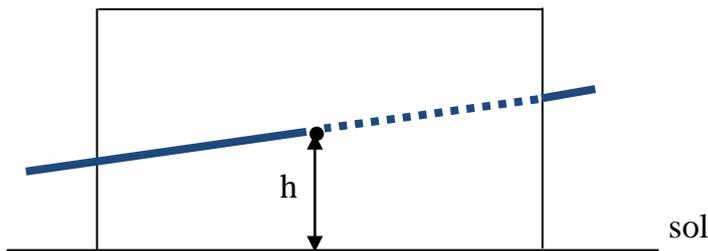
$$F_1(\theta) = \cos(\pi/2 \cdot \cos\theta) \cdot 1 / \sin\theta$$

$$\text{Donc : } F(\theta) = 2 \cdot \sin(k \cdot h \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(\pi/2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi) / \sqrt{1 - \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi}$$

$$F(\theta, \varphi, \psi) = 2 \cdot \sin(k \cdot h \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(\pi/2 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi) / \sqrt{1 - \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi}$$

**DIAGRAMME DE RAYONNEMENT DANS UN CAS PRECIS :  $h = 1,75 \lambda$**

**A- Diagramme de rayonnement dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'antenne**

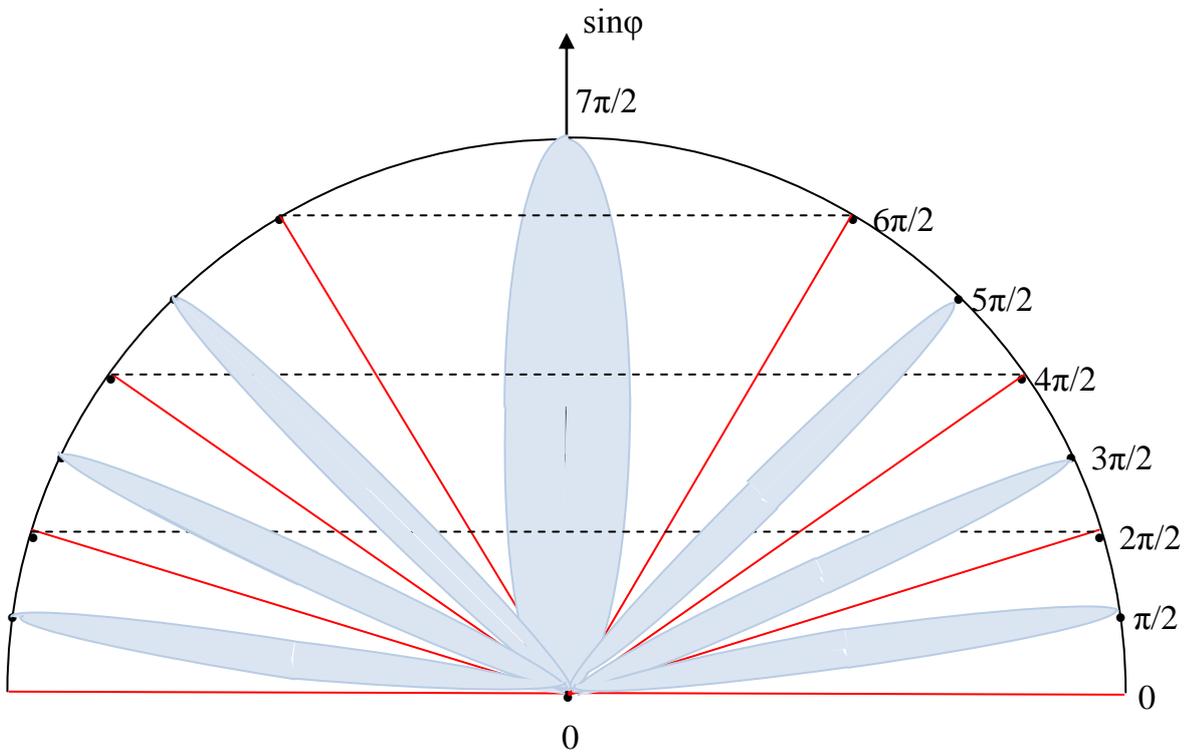


Ce plan est  $xoz$  /  $\psi = \pi / 2$

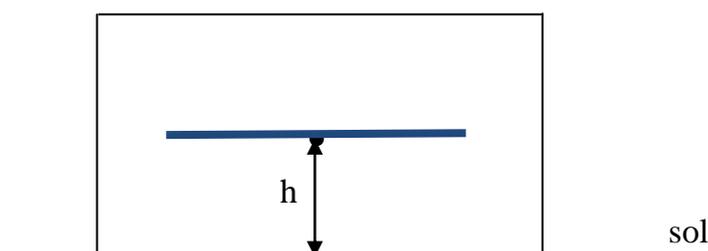
$$F(\varphi, \pi/2) = 2 \cdot \sin(k \cdot h \cdot \sin\varphi)$$

$$h = 1,75 \cdot \lambda = 7\lambda/4 \quad \rightarrow \quad f = 2 \cdot \sin(7\pi/2 \cdot \sin\varphi)$$

On trace les maximas et les minimas. On doit avoir un cercle de rayon de 2.



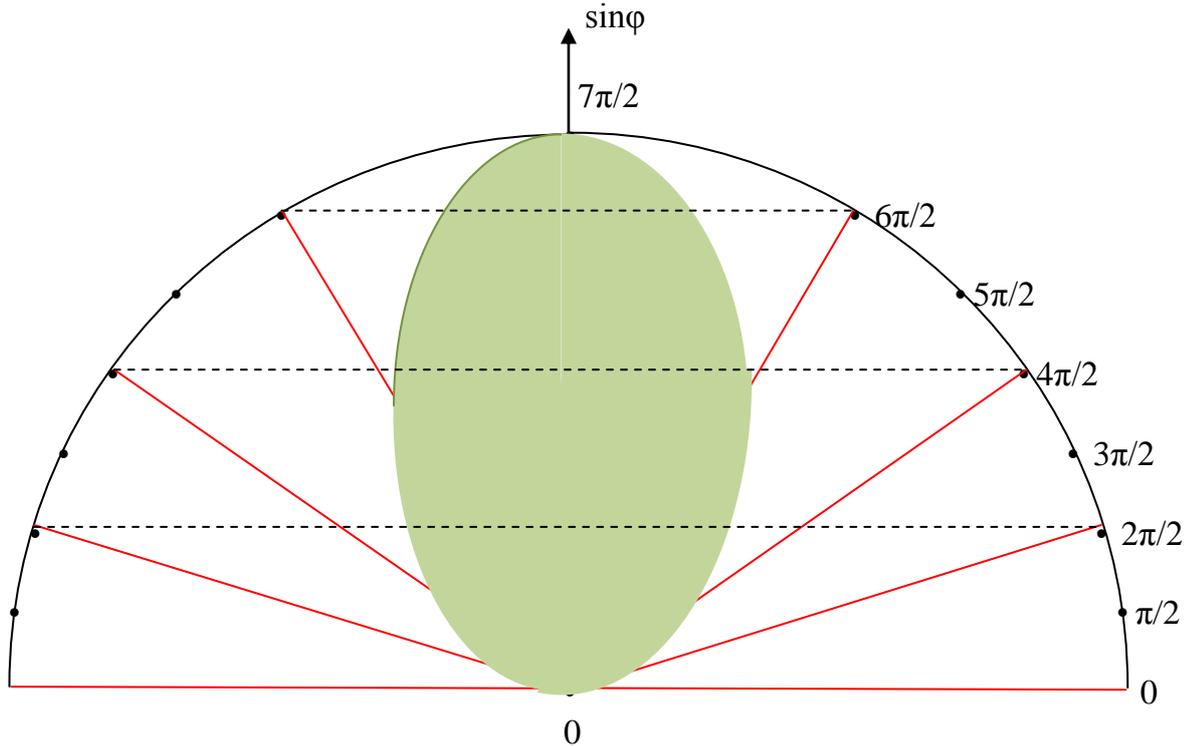
**B- Diagramme de rayonnement dans un plan parallèle à l'axe de l'antenne**



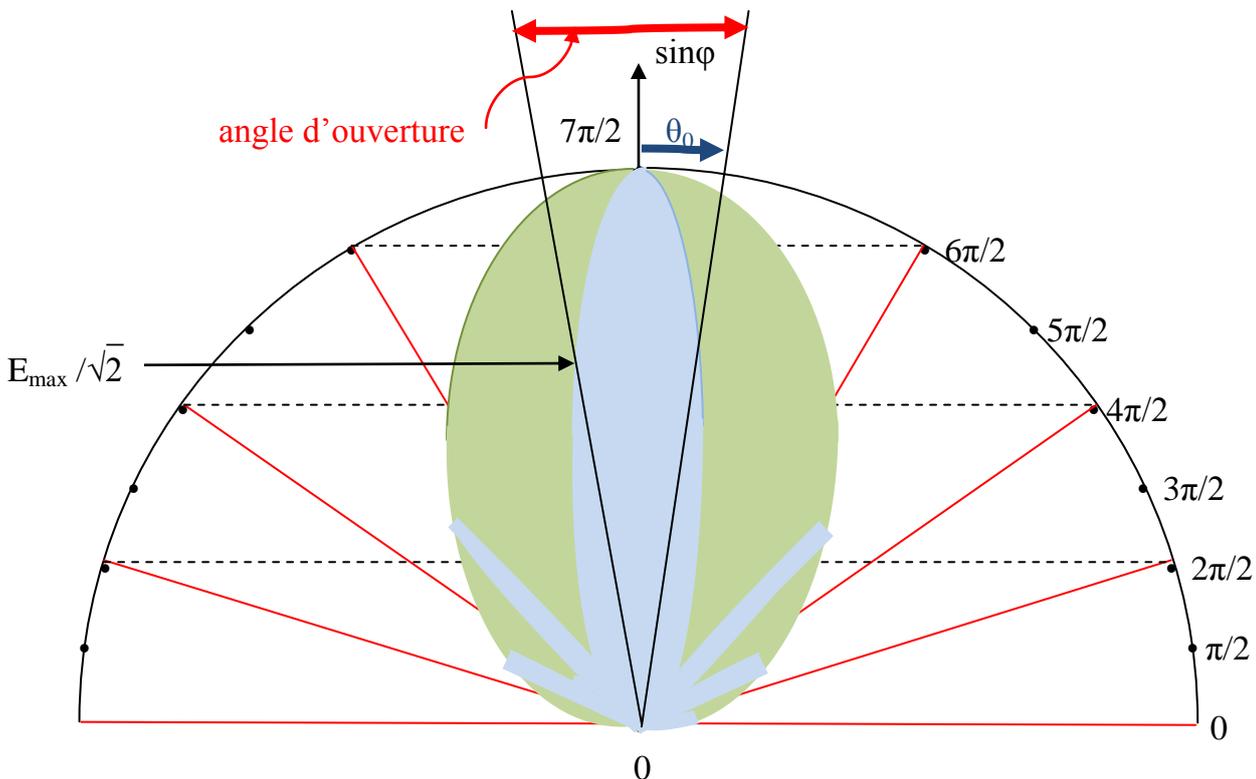
Ce plan est  $zoy$  /  $\psi = 0$

$$F(\varphi, 0) = 2 \cdot \sin(k \cdot h \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(\pi/2 \cdot \cos\varphi) / \sin\varphi$$

On trace le diagramme de la fonction :  $\cos(\pi/2 \cdot \cos\varphi) / \sin\varphi$



On va chercher les deux représentations précédentes et on les multiplie :



Angle d'ouverture à 3 dB :  $20 \log | \text{le champ dans une direction } \theta / \text{le champ max.} | = -3 \text{ dB}$

$$E_{\theta_0} = E_{\max} / \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \theta_0 \text{ est déterminé par graphe.}$$

$E_{\max}$  est connu  $\rightarrow$  On est capable de déterminer  $E_{\max} / \sqrt{2}$

On appelle  $\alpha$  l'angle d'ouverture à 3 db :  $\rightarrow \alpha = 2 \cdot \theta_0$

## CHAPITRE V : GROUPEMENTS D'ANTENNES

### I- Alignement uniforme

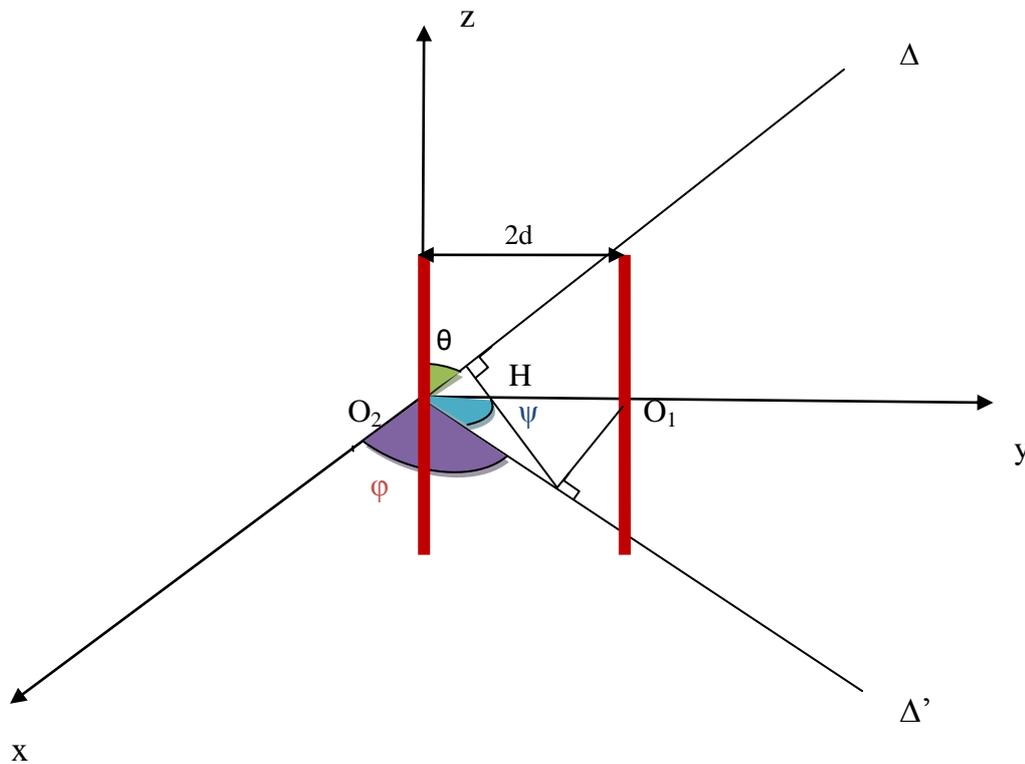
Le but de l'opération est de créer des lobes secondaires et de les ramener à des niveaux fixés sans toucher au lobe principal.

Définition : Lorsqu'on réalise un alignement d'antennes identiques régulièrement espacées dans l'espace, alimentées par des courants d'amplitude égale, on dit que l'**alignement est uniforme**.

#### I-1 Alignement de deux antennes verticales

FC : fonction caractéristique

DR : diagramme de rayonnement



On suppose que le courant de l'antenne  $O_1$  est en avance de  $2\pi\xi$  sur celui de  $O_2$ .

$$i_{O_1} = I(z) \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_{O_2} = I(z) \cdot e^{j(\omega t + \varphi - 2\pi\xi)}$$

$$i_{O_2} = i_{O_1} \cdot e^{-j2\pi\xi}$$

$$dE_2 = dE_1 \cdot e^{-j(k \cdot O_2 H + 2\pi\xi)}$$

$$O_2H = 2.d.\cos\psi.\sin\varphi$$

$$dE_2 = dE_1 \cdot e^{-j(2.k.d.\cos\psi.\sin\varphi + 2\pi\xi)}$$

$$dE_2 + dE_2 = dE_2 = dE_1 ( 1 + e^{-j.s} ) \quad s = 2.k.d.\cos\psi.\sin\varphi + 2\pi\xi$$

$$dE_T = 2. dE_1. \cos.s/2 \cdot e^{-js/2}$$

$$E_T = 2. E_1 \cdot e^{-j.s/2} \cdot \cos.s/2 \quad E_1 = \int dE_1$$

longueur d'antenne

$$F(\theta,\psi) = 2.F_1(\theta). \cos (k.d.\cos\psi.\sin\varphi + \pi\xi )$$

La deuxième caractérise complètement l'alignement.

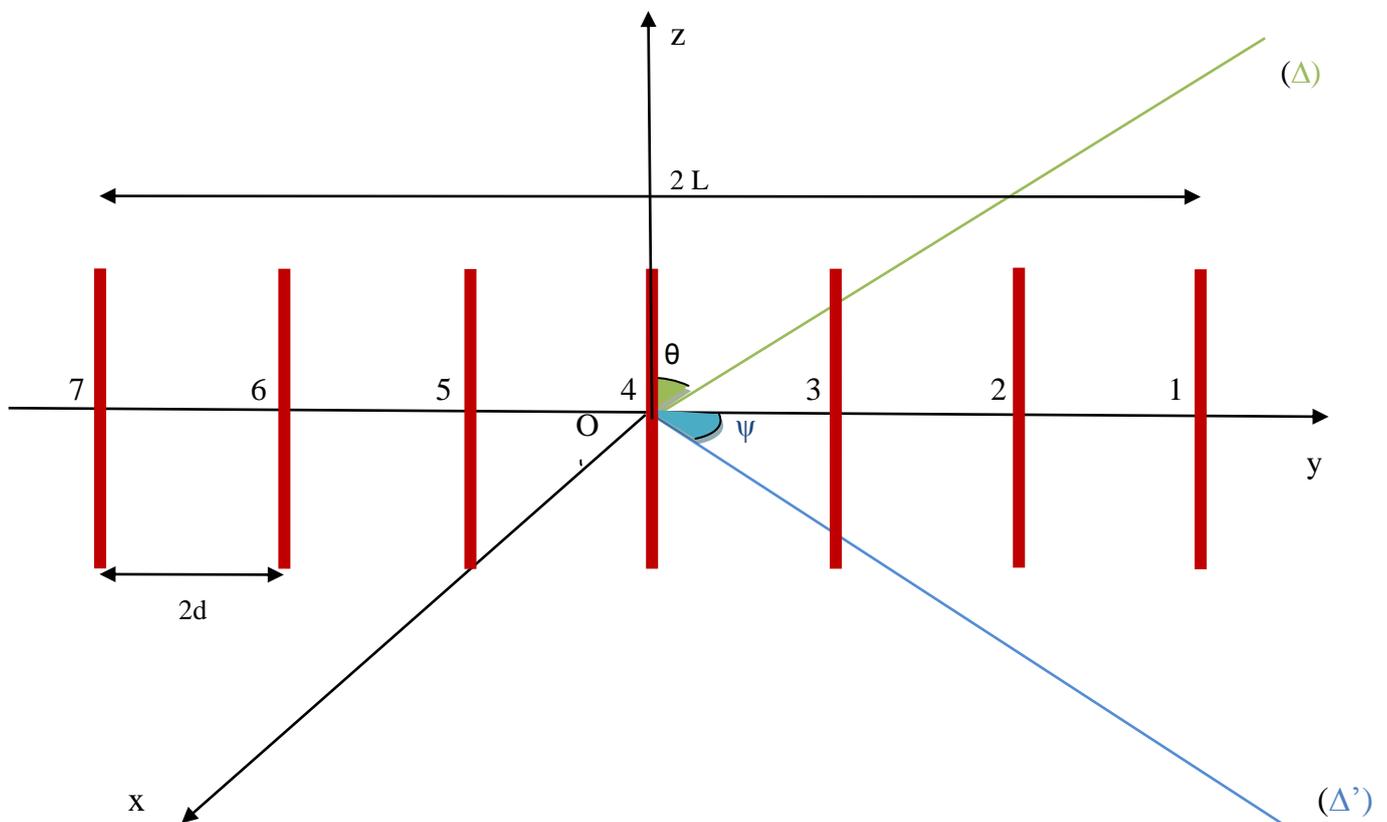
### I-2 Cas général

On doit tenir compte du déphasage spatial et du déphasage temporel.

$$dE_1 = ( -j. 60.\pi / \lambda.r ). \sin\theta. I(z). dz. e^{j(\omega.t-k.r_1)}$$

$$dE_2 = ( -j. 60.\pi / \lambda.r ). \sin\theta. I(z). dz. e^{j(\omega.t-k.r_1)} \cdot e^{\pm j2\pi\xi} \cdot e^{-jk.\Delta r}$$

Cas où l'on a n antennes alignées :



Toutes les antennes sont déphasées de  $2\pi\xi$ . On doit fixer les origines de phase.

On doit préciser l'origine des champs ; l'origine des champs et l'origine des phases peuvent-être les mêmes comme elles peuvent-être différentes.

Les calculs sont différents mais l'expression du champ total rayonné par cet alignement est la même.

On fixe l'antenne 1 comme origine des phases et des champs.

$$dE_1 = dE_1$$

$$dE_2 = dE_1 \cdot e^{-j.s} \quad s = 2.k.d.\cos\psi.\sin\theta + 2.\pi.\xi$$

$$dE_3 = dE_2 \cdot e^{-j.s} = dE_1 \cdot e^{-2j.s}$$

$$dE_4 = dE_3 \cdot e^{-j.s} = dE_1 \cdot e^{-3j.s}$$

$$dE_n = dE_{n-1} \cdot e^{-j.s} = dE_1 \cdot e^{-(n-1)j.s}$$

$$dE_T = \sum_{i=1}^n dE_i = dE_1 [ 1 + e^{-j.s} + e^{-2j.s} + e^{-3j.s} + \dots + e^{-(n-1)j.s} ]$$

$$E_T = E_1 [ \sum_{a=0}^{n-1} e^{-j.a.s} ] = E_1 [ 1 - e^{-j.n.s} ] / [ 1 - e^{-j.s} ] = E_1 \cdot e^{-j.(n-1).s/2} \cdot [ \sin(n.s/2) / \sin s/2 ]$$

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 \cdot e^{-j.(n-1).s/2} \cdot [ \sin(n.s/2) / \sin s/2 ]$$

$$\mathbf{F}(\theta, \psi) = \mathbf{F}(\theta) \cdot [ \sin(n.s/2) / \sin s/2 ]$$

L'origine O du repère est mise arbitrairement. Ce repère ne définit que les angles  $\theta$  et  $\psi$  de l'alignement et le plan de l'alignement, quelquesoit la parité de l'antenne  $F(\theta, \psi)$  est la même.

### Remarque :

On a rompu la symétrie par rapport à l'axe des z c'est-à-dire que le diagramme de rayonnement qui Etait un cercle ne l'est plus.

Dans F.C il y a  $\psi$  et  $\theta \rightarrow$  il y aura des diagrammes différents suivant qu'on prenne xoy ou yoz.

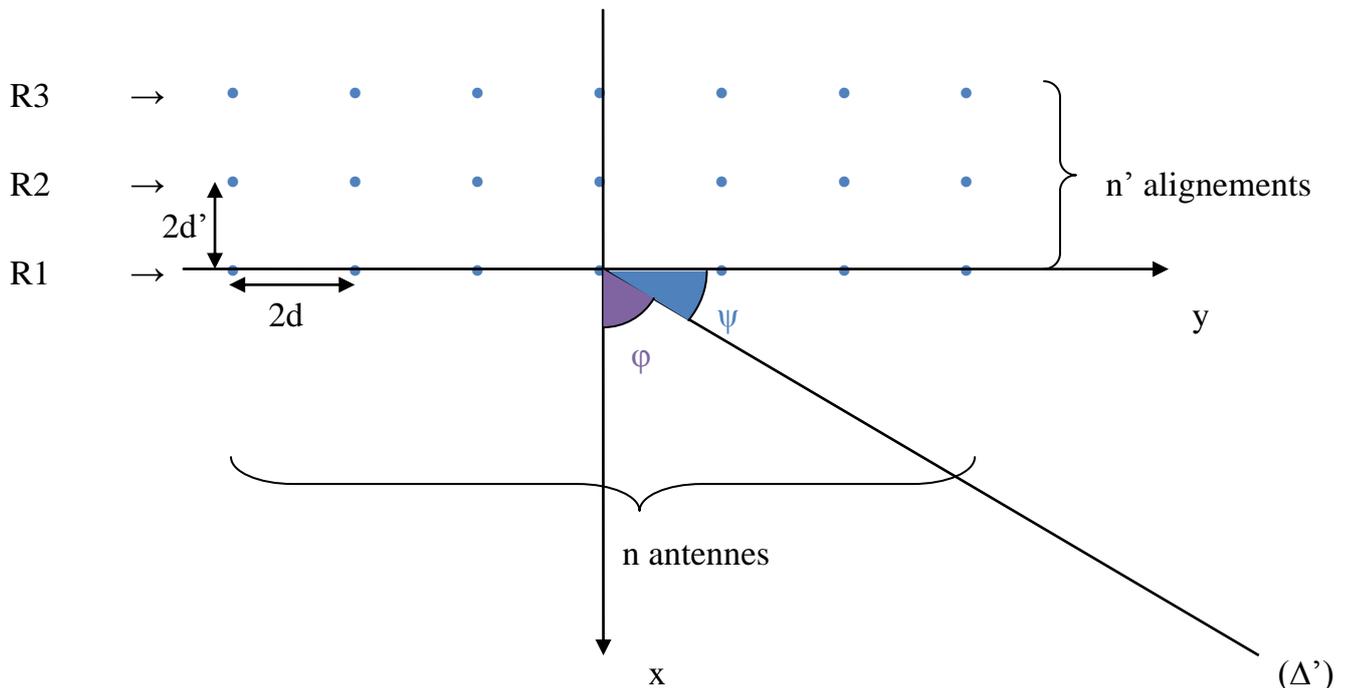
Dans la direction  $s=0 \rightarrow f(\theta_0, \psi_0) = F(\theta_0) \cdot n$

Plus le nombre d'antennes est important plus on est directif.

Pour  $s=0 \rightarrow$  on a le maxim maximum.

## II- Rideau d'antennes

Un rideau est alignement d'alignements.



Le 1<sup>er</sup> alignement est R1 →  $E_{R1} = E_1 \cdot \sin(n \cdot s/2) / \sin(s/2)$

Le 2<sup>ième</sup> alignement est R2 →  $E_{R2} = E_1 \cdot \sin(n \cdot s/2) / \sin(s/2)$       $s = 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi$

Le i<sup>ème</sup> alignement est Ri →  $E_{Ri} = E_1 \cdot \sin(n \cdot s/2) / \sin(s/2)$

On a maintenant un alignement sur Ox de n' antennes séparées par la distance 2d'.

$$E_{Res} = E_{R1} \cdot \sin(n' \cdot s'/2) / \sin(s'/2)$$

$$s' = 2 \cdot k \cdot d' \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi' = 2 \cdot k \cdot d' \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi'$$

$$F_R(\theta, \psi) = F(\theta) \cdot \sin(n/2) \cdot [2 \cdot k \cdot d \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi] / \sin(1/2) \cdot [2 \cdot k \cdot d \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi] \times$$

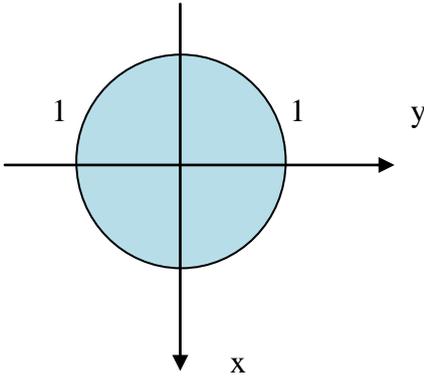
$$\sin(n'/2) \cdot [2 \cdot k \cdot d' \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi'] / \sin(1/2) \cdot [2 \cdot k \cdot d' \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta + 2 \cdot \pi \cdot \xi']$$

C'est cette fonction caractéristique qui est à la base des radars.

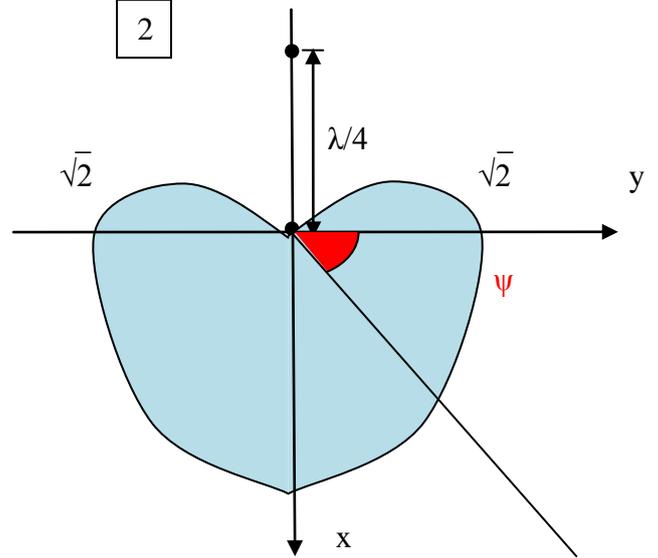
Si  $s=0$  et  $s'=0$  :

$$F_R(\theta, \psi) = n \cdot n' \cdot F_1(\theta)$$

1



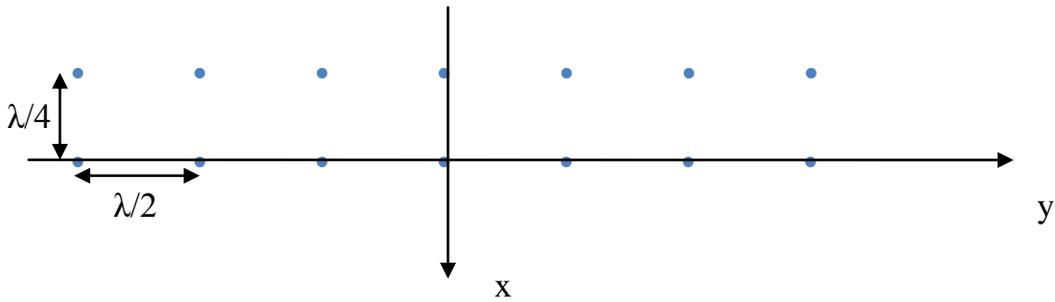
2



Le déphasage en courant est de  $\pi/2$

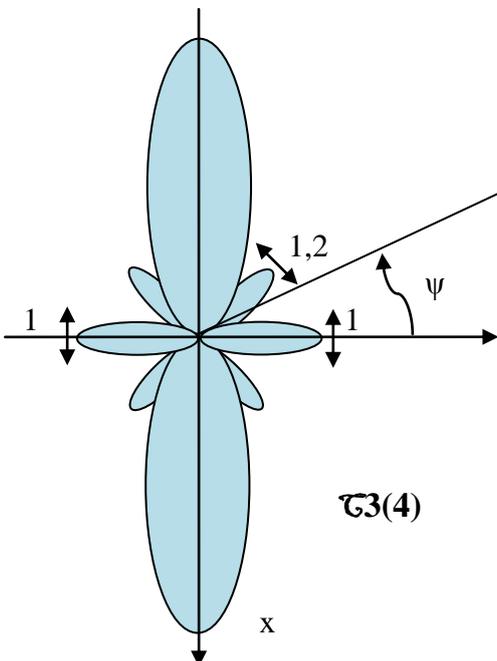
$$F_2(\theta, \psi) = F_1(\theta) \cdot \sin [ 2 (\pi/4 + \pi/4 \sin \psi \cdot \sin \theta ) ] / \sin [ \pi/4 + \pi/4 \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta ]$$

La fonction dépend uniquement de  $\psi$  et  $\sin \theta$  est maximum.

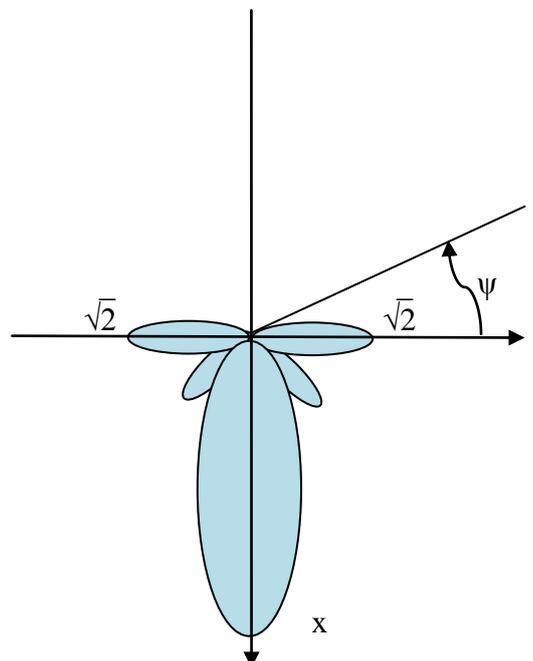


$$F_3(\theta, \psi) = F_2(\theta, \psi) \cdot \sin [ 5\pi/2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta ) ] / \sin [ \pi/2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta ]$$

$\mathcal{U}_3(4)$



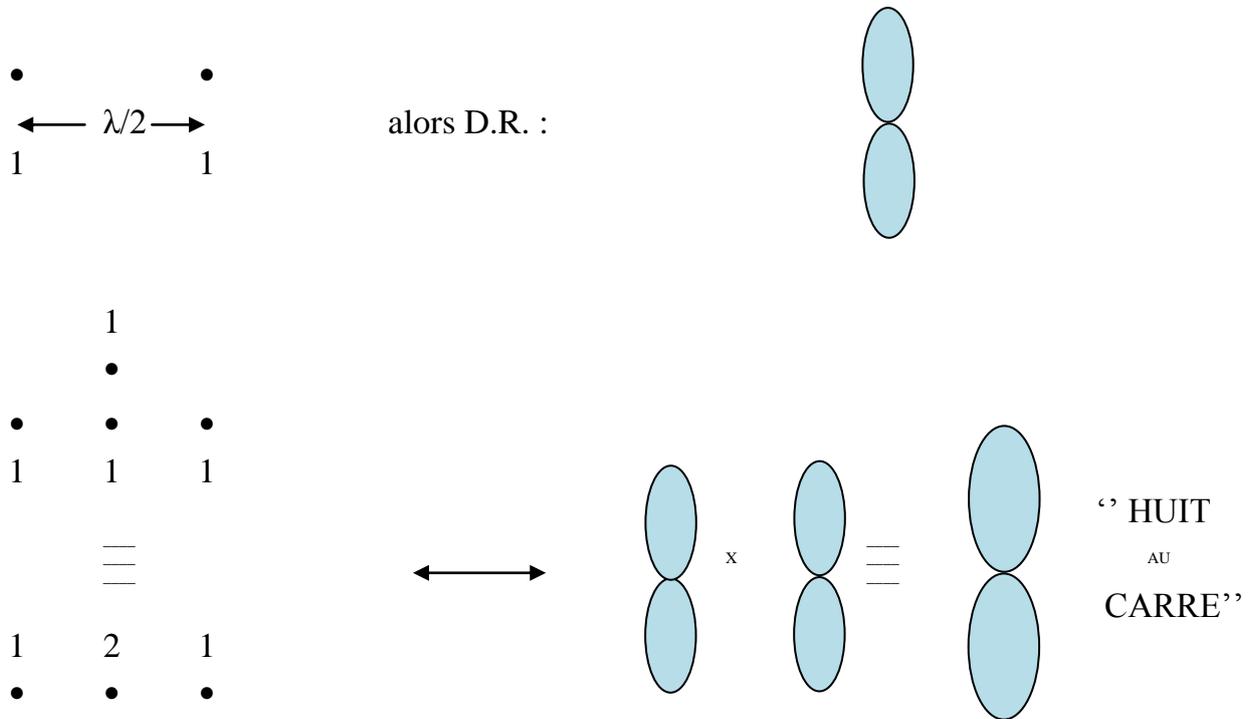
$\mathcal{U}_3(4)$



### III- Les alignements non uniformes

Un réseau non uniforme est un réseau d'antennes identiques du point de vue physique mais alimentées par des courants différents, ceci permet de s'affranchir des lobes secondaires.

Exemple :  $I_{ref} \rightarrow 1$



Ceci fait penser au binôme de Newton  $\rightarrow$  on l'appellera **répartition binômiale** :

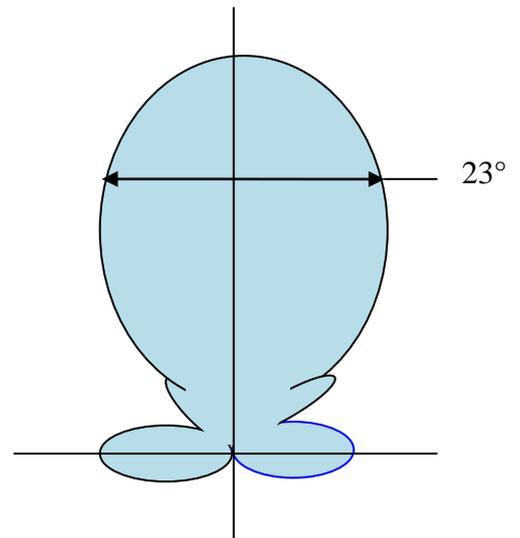
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Si on a  $n$  antennes, l'antenne de rang  $r$  doit-être alimentée par :

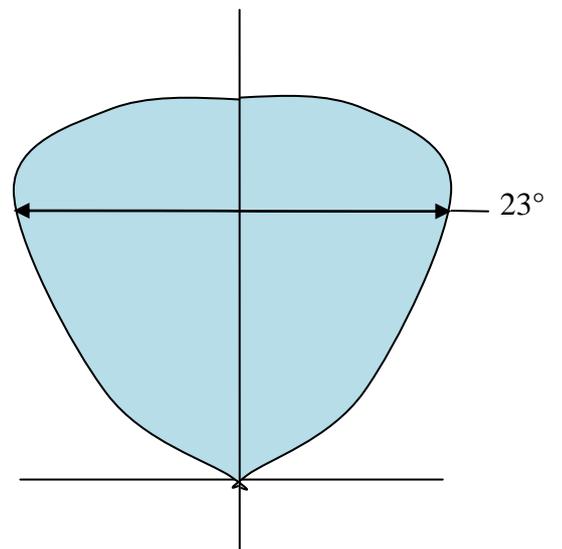
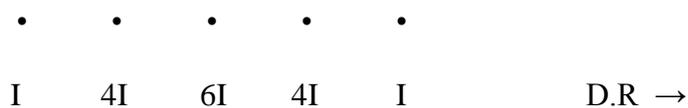
$n! / r! (n-r)!$  fois le courant de référence.

Pour le calcul du champ, on va pondérer la somme des exponentielles.

**Répartition uniforme :**



**Répartition binomiale :**

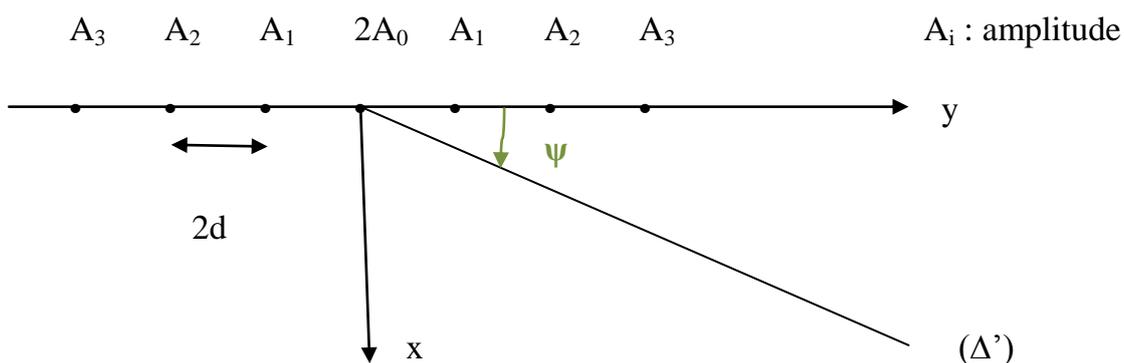


Ce qu'on a gagné en lobes secondaire, on l'a perdu en angle d'orientation d'où l'idée de faire un compromis entre le niveau des lobes secondaires par rapport à un angle d'ouverture fixe.

**Cas général :**

Dans tout ce qui suit, on suppose que les amplitudes sont symétriques par rapport au centre d'alignement.

**1°- Nombre impair de sources**



On prend l'antenne centrale comme origine du point de vue spatial et du point de vue phase.

Elle rayonne un champ  $E_0' = 2.A_0.E_1$  où  $E_1$  est le champ créé par cette antenne alimentée par un courant unité.

$$E_1' = A_1 \cdot E_1 \cdot e^{-j.s} \quad \text{où } s = 2.k.d.\cos\psi.\sin\theta + 2.\pi.\xi$$

$$E_1'' = A_1 \cdot E_1 \cdot e^{+j.s}$$

$$E_1' + E_1'' = 2.A_1 \cdot E_1 \cdot \cos s = 2.A_1 \cdot E_1 \cdot \cos 2s/2$$

$$E_2' + E_2'' = 2.A_2 \cdot E_1 \cdot \cos 2s = 2.A_2 \cdot E_1 \cdot \cos 4s/2$$

Le rang  $i$  dans les 2 dernières antennes :

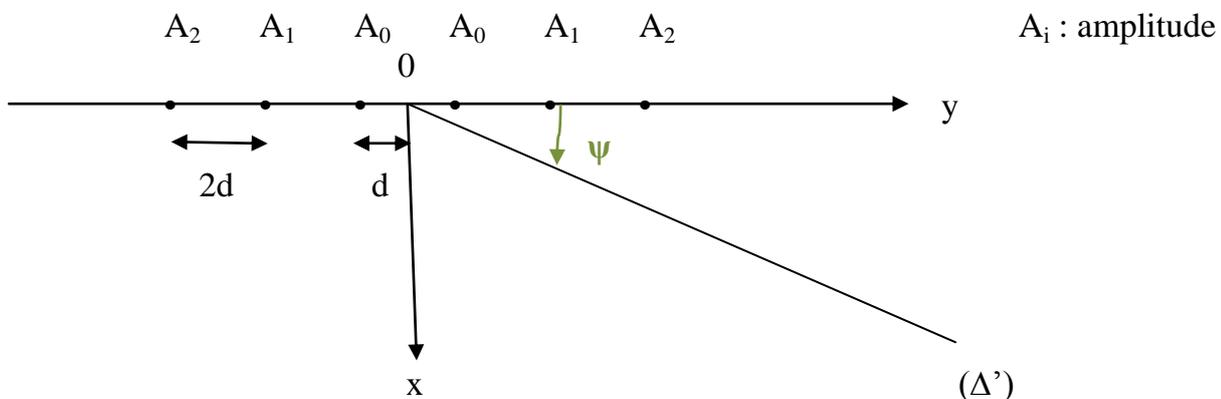
$$2i + 1 = n \quad \rightarrow \quad i = (n - 1) / 2$$

$$E_{(n-1)/2}' + E_{(n-1)/2}'' = 2.A_{(n-1)/2} \cdot E_1 \cdot \cos (n-1)s/2$$

**Dans le cas où  $n$  est impair :**

$$E = 2 \cdot E_1 \cdot [ A_0 + A_1 \cdot \cos 2s/2 + A_2 \cdot \cos 4s/2 + \dots + A_{(n-1)/2} \cdot \cos (n-1)s/2 ]$$

## 2°- Nombre pair de sources



On prend 0 comme origine des phases et des sources.

$$E_0' = A_0 \cdot E_1 \cdot e^{-j.s/2}$$

$$E_0'' = A_0 \cdot E_1 \cdot e^{+j.s/2}$$

$$E_0' + E_0'' = 2.A_0 \cdot E_1 \cdot \cos s/2$$

$$E_1' + E_1'' = 2.A_1 \cdot E_1 \cdot \cos 3s/2$$

$$2i + 2 = n \quad \rightarrow \quad i = (n - 2) / 2$$

**Dans le cas où n est pair :**

$$E = 2 \cdot E_1 \cdot [ A_0 \cdot \cos s/2 + A_1 \cdot \cos 3s/2 + \dots + A_{(n-2)/2} \cdot \cos(n-2)s/2 ]$$

### 3° - Polynômes de TCHEBYSHEFF, Applications

$$e^{+j \cdot m \cdot s/2} = \cos m \cdot s/2 + j \cdot \sin m \cdot s/2 = [ \cos s/2 + j \cdot \sin s/2 ]^m$$

On arrive à montrer que pour  $m = 0 \rightarrow \cos ms/2 = \cos 0 = 1 = T_0(x)$

$m = 1 \rightarrow \cos ms/2 = \cos s/2 = x = T_1(x)$

$m = 2 \rightarrow \cos ms/2 = \cos s = 2 \cdot \cos^2 s/2 - 1 = 2 \cdot x^2 - 1 = T_2(x)$

$m = 3 \rightarrow \cos ms/2 = \cos 3s/2 = 4 \cdot \cos^3 s/2 - 3 \cdot \cos s/2 = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x = T_3(x)$

$m = 4 \rightarrow T_4(x) = 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1$

$m = 5 \rightarrow T_5(x) = 16 \cdot x^5 - 20 \cdot x^3 + 5 \cdot x$

$m = 6 \rightarrow T_6(x) = 32 \cdot x^6 - 48 \cdot x^4 + 12 \cdot x^2 - 1$

Les  $T_1(x)$  sont les polynômes de Tchebysheff.

Les polynômes de Tchebysheff sont les solutions de l'équation :

$$(1 - x^2) \cdot y'' - x \cdot y' + x^2 \cdot y = 0$$

qui comportent comme solution :

quand  $|x| \leq 1 \rightarrow x = \cos \Theta$

quand  $|x| > 1 \rightarrow x = \text{ch} \Theta$

**Dans le cas où n est impair :**

$$E = 2 \cdot E_1 \cdot [ A_0 \cdot T_0(x) + A_1 \cdot T_2(x) + A_2 \cdot T_4(x) + \dots + A_{(n-1)/2} \cdot T_{(n-1)}(x) ]$$

**Dans le cas où n est pair :**

$$E = 2 \cdot E_1 \cdot [ A_0 \cdot T_1(x) + A_1 \cdot T_3(x) + A_2 \cdot T_5(x) + \dots + A_{(n-2)/2} \cdot T_{(n-1)}(x) ]$$