

Contrôle de Thermodynamique

Exercice 1 : (6 pts)

- Trouver l'expression du travail W pour une transformation adiabatique d'un gaz parfait. En déduire qu'une compression adiabatique s'accompagne d'un échauffement ($T_f > T_i$).
- L'expression dp de la différentielle de la pression de n moles d'un gaz est donnée par :

$$dp = f(V) dT - n \frac{RT}{(V - nb)^2} dV$$

Où V le volume, T la température, b et R des constantes et $f(V)$ une fonction de V .

- Trouver l'expression de $f(V)$. en prenant la constante d'intégration nulle.
- Montrer que l'équation d'état de ce gaz est donnée par : $p(V-nb)=nRT$
- Déterminer les coefficients thermoélastiques du gaz.

Exercice 2 : (5 pts)

1- Calculer la chaleur latente de fusion L_f de l'eau à partir des expériences suivantes :

- On fournit une quantité de chaleur $Q_1 = 324,5$ KJ pour transformer, sous pression atmosphérique, 500g de glace de -10^0 C en eau à 70^0 C.
- On fournit une quantité de chaleur $Q_2 = 6,11 \cdot 10^3$ KJ pour transformer, sous pression atmosphérique, 2 kg de glace de -10^0 C en vapeur à 110^0 C.

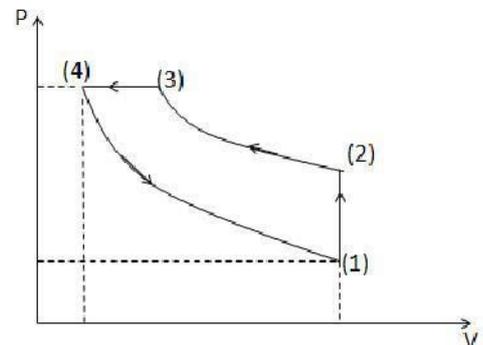
2- Comparer les deux valeurs de L_f . Conclure.

On donne : chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_v = 2,26 \cdot 10^3$ kJ/kg

Capacités thermiques massique en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$: glace $C_g = 2,1$; eau $C_e = 4,2$ et vapeur $C_v = 2$.

Exercice 3 : (9 pts)

Le cycle décrit par les transformations de n moles d'un gaz parfait est illustré dans la figure ci jointe.



1- Sachant que les transformations (2 à 3) et (4 à 1) s'effectuent sans échanges de chaleurs, donner la nature de chacune des quatre transformations (ex : détente, compression, adiabatique, ...),

2- Calculer les températures T_2 , T_4 et les volumes V_2 , V_3 et V_4 .

3- Donner les expressions des travaux W_i et des chaleurs Q_i échangés pour chaque transformation.

4- Vérifier que la variation de l'énergie totale ΔU du cycle est nulle.

On donne : $a = P_2/P_1 = 4$; $V_1 = 1$ l ; $T_1 = 50^0$ C ; $T_3 = 120^0$ C ; $\gamma = 1,4$.

N.B : Pas de calculs numériques pour les questions 2 et 3.

بالتوفيق

Exercice 1 : (6 pts)

- a- Trouver l'expression du travail W pour une transformation adiabatique d'un gaz parfait.
En déduire qu'une compression adiabatique s'accompagne d'un échauffement ($T_f > T_i$).

Dans une compression adiabatique on $\delta Q_{\text{adi}} = 0$. Pour un gaz parfait on a $pV^\gamma = \text{cte}$.

$$dU = \delta W + \delta Q = \delta W$$

1^{ère} méthode : Pour un gaz parfait l'énergie interne ne dépend que de la température donc :

$$dU = \delta W + \delta Q = \delta W = nC_v dt \longrightarrow \Delta U = W = nC_v \Delta T = nC_v (T_f - T_i)$$

$$\text{2^{ème} méthode} : \delta W = -pdV \longrightarrow W = -\int_i^f P dV = -\int_i^f P V^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = -k \int_i^f \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$W = -k \int_i^f \frac{dV}{V^\gamma} = -k \left(\frac{P_f V_f^{1-\gamma} - P_i V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \text{ on a } k = P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma \text{ donc}$$

$$W = \left(\frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \right) = \left(\frac{nRT_f - nRT_i}{\gamma - 1} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = nC_v (T_f - T_i)$$

- Pour une compression, le volume diminue donc $W > 0 \longrightarrow T_f > T_i$

- b- L'expression dp de la différentielle de la pression de n moles d'un gaz est donnée par :

$$dp = f(V) dT - n \frac{RT}{(V - nb)^2} dV \quad (1)$$

Où V le volume, T la température, b et R des constantes et $f(V)$ une fonction de V .

- Trouver l'expression de $f(V)$. en prenant la constante d'intégration nulle.

dp est une différentielle totale exacte donc :

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial \left(-n \frac{RT}{(V - nb)^2} \right)}{\partial T} \longrightarrow f'(V) = -n \frac{R}{(V - nb)^2} \Rightarrow f(V) = \frac{nR}{(V - nb)} + K$$

$K=0$ d'après l'énoncé donc

$$f(V) = \frac{nR}{(V - nb)}$$

- Montrer que l'équation d'état de ce gaz est donnée par : $p(V-nb)=nRT$

En introduisant $f(V)$ dans dp on a :

$$dp = \frac{nR}{(V-nb)} dT - n \frac{RT}{(V-nb)^2} dV = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) dV$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) = \frac{nR}{(V-nb)} \longrightarrow P = \frac{nRT}{(V-nb)} + g(V)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + g'(V) \stackrel{(1)}{=} -\frac{nRT}{(V-nb)^2}$$

Donc $g'(V)=0 \longrightarrow g(V) = K$

$$P = \frac{nRT}{(V-nb)} + K, \text{ pour } V \longrightarrow \infty ; p \longrightarrow 0 \text{ donc } K=0$$

D'où $P(V-nb) = nRT$

- Déterminer les coefficients thermoélastiques du gaz.

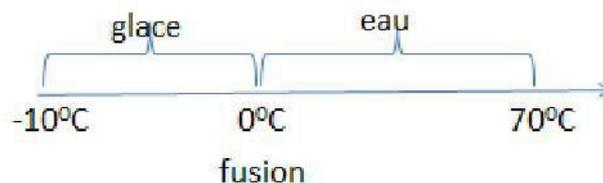
$$\alpha_p = \frac{nR}{pV} ; \quad \beta_v = \frac{nR}{p(V-nb)} = \frac{1}{T} ; \quad \chi_T = \frac{V-nb}{pV} = \frac{nRT}{p^2V}$$

Remarque : Il ne faut pas remplacer pV par nRT parce que ce n'est pas un gaz parfait.

Exercice 2 : (5 pts)

- 1- Calculer la chaleur latente de fusion L_f de l'eau à partir des expériences suivantes :

- On fournit une quantité de chaleur $Q_1 = 324,5 \text{ kJ}$ pour transformer, sous pression atmosphérique, 500g de glace de -10°C en eau à 70°C .



- Chaleur fournie $Q_1 = 324,5 \text{ kJ}$
- Chaleur reçue par la glace $Q_g = mC_g(0-(-10))$
- Chaleur de fusion $Q_f = mL_f$
- Chaleur reçue par l'eau $Q_e = mC_e(70-0)$

$$Q_1 = Q_g + Q_f + Q_e \longrightarrow Q_f = Q_1 - Q_g - Q_e$$

$$\text{donc } L_f = \frac{Q_1 - Q_g - Q_e}{m} \Rightarrow L_f = 334 \text{ kJ / kg} \text{ avec } m = 0,5 \text{ kg}$$

Remarque : Ce n'est pas la peine de convertir la température de C à K car on a une différence : $(0+273) - (-10+273) = (0 - (-10))$

- On fournit une quantité de chaleur $Q_2 = 6,11 \cdot 10^3$ KJ pour transformer, sous pression atmosphérique, 2 kg de glace de -10^0 C en vapeur à 110^0 C.



- Chaleur fournie $Q_2 = 6,11 \cdot 10^3$ KJ
- Chaleur reçue par la glace $Q_g = mC_g(0 - (-10))$
- Chaleur de fusion $Q_f = mL_f$
- Chaleur reçue par l'eau $Q_e = mC_e(100 - 0)$
- Chaleur de vaporisation $Q_v = mL_v$
- Chaleur reçue par la vapeur $Q_{vapeur} = mC_v(110 - 100)$

$$Q_2 = Q_g + Q_f + Q_e + Q_v + Q_{vapeur} \longrightarrow Q_f = Q_2 - Q_g - Q_e - Q_v - Q_{vapeur}$$

$$L_f = \frac{Q_2 - Q_g - Q_e - Q_v - Q_{vapeur}}{m} \Rightarrow L_f = 2591 \text{ kJ / kg} \quad \text{avec } m = 2 \text{ kg}$$

2- Comparer les deux valeurs de L_f .

On trouve $L_{f1} < L_{f2}$

On donne : chaleur latente de vaporisation de l'eau $L_v = 2,26$ kJ/kg

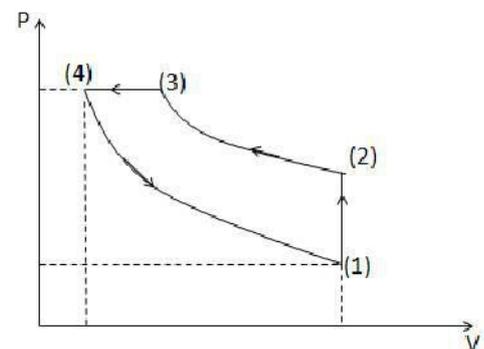
Capacités thermiques massique en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$: glace $C_g = 2,1$; eau $C_e = 4,2$ et vapeur $C_v = 2$.

Remarque : La valeur de $L_{f2} = 2591$ est trouvée pour $L_v = 2,26$ kJ/kg, or un facteur de 10^3 a été oublié lors de la frappe de l'énoncé. En fait, $L_v = 2,26 \cdot 10^3$ kJ/kg ce qui donne $L_f = 334$ kJ/kg. Donc L_f est la même car elle ne dépend que de la pression et de la nature de l'élément.

Exercice 3 : (9 pts)

Le cycle décrit par les transformations de n moles d'un gaz parfait est illustré dans la figure ci jointe.

- Sachant que les transformations (2 à 3) et (4 à 1) s'effectuent sans échanges de chaleurs, donner la nature de chacune des quatre transformations (ex : détente, compression, adiabatique, ...),



Les transformations (2 à 3) et (4 à 1) s'effectuent sans échanges de chaleurs donc ce sont des adiabatiques. Pour (2 à 3) la pression augmente donc c'est une compression alors que pour (4 à 1) pression diminue donc c'est une détente.

Pour la transformation (1 à 2) la pression augmente à $v = \text{cte}$ donc c'est une compression isochore.

Pour la transformation (3 à 4) le volume augmente à $p = \text{cte}$ donc c'est une compression isobare.

- Transformation (1 à 2) : compression isochore.
- Transformation (2 à 3) : compression adiabatique.
- Transformation (3 à 4) : compression isobare.
- Transformation (4 à 1) : détente adiabatique.

2- Calculer les températures T_2 , T_4 et les volumes V_2 , V_3 et V_4 .

- (1 à 2) : compression isochore. $V_1 = V_2$

$$G.P \Rightarrow \begin{cases} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{cases} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right) T_1 \quad \text{A.N} \quad T = 2T_1 = 100^\circ\text{C}$$

- (2 à 3) : compression adiabatique $(P_2, V_2, T_2) \longrightarrow (P_3, V_3, T_3)$

La relation qu'il faut utiliser est $(TV^{\gamma-1} = \text{cte}) \longrightarrow T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \longrightarrow V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

A.N $V_2 = V_1$ donc $V_3 = 0,633$ litre

- (3 à 4) : compression isobare $P_4 = P_3$

$$\begin{cases} P_3 V_3 = nRT_3 \\ P_4 V_4 = nRT_4 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_4}{V_3} = \frac{T_4}{T_3} \Rightarrow \frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3} \quad (1)$$

- (4 à 1) : détente adiabatique

$$T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (2)$$

En multipliant (1) par (2) on élimine T_4 et on trouve $V_4^\gamma = \frac{V_3}{T_3} T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow V_4 = \left(\frac{V_3}{T_3} T_1\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

A.N $V_4 = 0,386$ litre et $T_4 = \frac{V_4}{V_3} T_3 = 73,17^\circ\text{C}$

2^{ème} méthode pour calculer V_4

- (2 à 3) : détente adiabatique donc $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$

- (4 à 1) : détente adiabatique donc $P_4 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma$

$V_1 = V_2$ et $P_3 = P_4$ donc en faisant le rapport des deux expressions, on trouve :

$$V_4 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1 \quad \text{AN} : V_4 = 0,386 \text{ litre}$$

3- Donner les expressions des travaux W_i et des chaleurs Q_i échangés pour chaque transformation.

On donne : $a=P_2/P_1=4$; $V_1 = 1 \text{ l}$; $T_1 = 50^\circ\text{C}$; $T_3 = 120^\circ\text{C}$; $\gamma = 1,4$.

N.B : Pas de calculs numériques pour les questions 2 et 3.

- (1 à 2) : compression isochore

$$V=\text{cte} \text{ donc } W_1=0 \text{ et } \Delta U_1 = Q_1 = nC_v\Delta T = nC_v(T_2 - T_1)$$

- (2 à 3) : compression adiabatique

$$Q_2=0 \text{ et d'après l'exercice 1 : } W_2 = (P_3V_3 - P_2V_2)/(\gamma-1) = nC_v(T_3 - T_2)$$

- (3 à 4) : compression isobare $P_3 = P_4$

$$P=\text{cte} \text{ donc } W_3 = -P_3(V_4 - V_3) = -nR(T_4 - T_3) \text{ et } Q_3 = nC_p\Delta T = nC_p(T_4 - T_3) \text{ (dp=0)}$$

- (4 à 1) : détente adiabatique.

$$Q_4=0 \text{ } W_4 = (P_1V_1 - P_4V_4)/(\gamma-1) = nC_v(T_1 - T_4)$$

3- Vérifier que la variation de l'énergie totale ΔU du cycle est nulle.

$$\Delta U = W_T + Q_T = nC_v(T_2 - T_1) + nC_v(T_3 - T_2) - nR(T_4 - T_3) + nC_p(T_4 - T_3) + nC_v(T_1 - T_4)$$

En remplaçant nR et C_p en fonction de C_v on trouve $\Delta U = 0$

Remarque :

- Dans le calcul de la température ce n'est pas la peine de convertir le $^\circ\text{C}$ en K. Et si vous le faites $T_2 = 2 \times T_1 + 273$ et non pas ~~$T_2 = 2 \times (T_1 + 273)$~~ .

- Il faut convertir les travaux et les chaleurs en températures ou en fonction de PV pour calculer

$\Delta U = 0$ pour un cycle.