Chapitre 07 – Suite-: L’analyse de variance à deux facteurs avec interaction = (ANOVA à deux facteurs avec interaction) :

Ce type d’ANOVA permet de tester, en plus de l’effet isolé de chacun des facteurs, **l’effet de l’interaction** des deux facteurs. Pour cela il faut disposer de plusieurs mesures pour chaque combinaison de niveaux, c’est-à-dire dans chaque cellule.

		Critère B		
		1	...	J
Critère A	1	1	1	1
		...	...	...
		k	k	k
	...	1	1	1
		...	...	...
		k	k	k
	I	1	1	1
		...	...	...
		k	k	k

Nous noterons **N** le nombre total de mesures effectuées (d’observations):

$$\mathbf{N = I \times J \times K}$$

Pour cela, on introduit le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j,k} \quad , \quad i = 1, \cdots, I;\ j = 1, \cdots, J;\ k = 1, \cdots, K.$$

avec les contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{I} \gamma_{i,j} = 0\,,\, \forall\, j \in \{1,\cdots,J\} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} \gamma_{i,j} = 0\,,\, \forall\, i \in \{1,\cdots,I\}\,.$$

On a introduit ici un terme d'interaction $\boldsymbol{\gamma_{i,j}}$ qui représente l'interaction entre les deux facteurs.

$\boldsymbol{\gamma_{i,j,k}}$est la valeur prise par la variable réponse **Y** dans les conditions $(A_i;B_j)$ lors du k$^{\text{-ième}}$ essai.

Il y a donc **N = I × J × K**variables aléatoires $\boldsymbol{\gamma_{i,j,k}}$dans le tableau ci-dessus.

On supposera toujours réalisées les hypothèses standards suivantes :

1. $\varepsilon_{i,j,k}$ et $\varepsilon_{l,m,n}$ sont indépendantes si $(i,j,k) \neq (l,m,n)$ avec $1 \leq i,l \leq I$, $1 \leq j,m \leq J$ et $1 \leq k,n \leq K$.

2. $\forall\,(i,j,k),\, i=1,\cdots,I;\, j=1,\cdots,J;\, k=1,\cdots,K$; $\mathcal{L}(\varepsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Les résultats permettent de tester trois séries d'hypothèses:

H_0^A: Les moyennes de la variable *Y*ne sont pas affectées par le critère A.

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i$$

H_0^B: Les moyennes de la variable Yne sont pas affectées par le critère B.

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_j$$

H_0^{AB}: Les critères A et B n'interagissent pas sur les moyennes.

On garde les mêmes notations de la section précédente:
SC = Somme des carrés des écarts

• Variation théorique totale = $\mathbf{SC_T = SCE_A + SCE_B + SC_R + SC_{interaction}}$

• Variation théorique résiduelle (“due aux erreurs”) = $\mathbf{SC_R}$

• Variation théorique due aux facteurs A ou B = $\mathbf{SC_A}$ ou $\mathbf{SC_B}$

• Variation théorique des cellules = $SC_{\mathbf{interaction}}=SC_{\mathbf{AB}}$

On calcule les quantités suivantes :

$\boldsymbol{C = \frac{T^2}{IJK}}$, où **T** est la somme de toutes les observations.

Puis, on dresse le tableau suivant :

	SC	ddl	S^2	F
Facteur A	$\frac{\sum_I T_{A_i}^2}{JK} - C$	**I-1**	$\frac{\mathbf{SCA}}{\mathbf{I-1}}$	$F_A = \frac{S_A^2}{S_R^2}$
Facteur B	$\frac{\sum_j T_{B_i}^2}{IK} - C$	**J-1**	$\frac{\mathbf{SCB}}{\mathbf{J-1}}$	$F_B = \frac{S_B^2}{S_R^2}$
Résiduelle	$\sum_I \sum_J \sum_K Y_{i,j}^2 - \frac{\sum_I \sum_J y_{i,j}^2}{K}$	**IJ(K-1)**	$\frac{\mathbf{SCR}}{\mathbf{IJ(K-1)}}$	
Interaction entre A et B	$\frac{\sum_I \sum_J y_{i,j}^2}{K} - C$	**(I-1)(J-1)**	$\frac{\mathbf{SCinter}}{\mathbf{(I-1)(J-1)}}$	$F_{inter} = \frac{S_{AB}^2}{S_R^2}$
Totale	**SCE_A + SCE_B + SC_R + SC_{inter}**	**IJK-1**		

Exercice 01: Le régime miracle !

On désire quantifier l'efficacité de trois types de régimes, de quatre intensités d'activité physique ainsi que l'interaction de ces deux critères sur la perte de poids.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
Régime 1	7	15	12	1
	12	21	14	4
	5	13	8	3
	8	12	11	7
	12	9	10	8
	6	12	12	5
Régime 2	5	13	14	4
	21	15	12	12
	12	12	13	8
	8	16	15	9
	10	17	9	11
	9	14	10	9
Régime 3	4	14	15	12
	6	17	16	10
	3	17	12	8
	4	18	9	11
	6	20	8	9
	4	21	17	8

- Quel est l'effet du régime, de l'exercice physique ainsi que de leurs interaction sur la perte de poids ?