

Chapitre 2

Matrices de transformation entre vecteurs, repères et torseurs

2.1. Introduction

En robotique, on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères. Ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs axes et leurs origines correspondent respectivement à des directions et à des points privilégiés ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution de la tâche : direction d'insertion ou centre de gravité d'une pièce par exemple, mais aussi axe d'une articulation ou extrémité d'un outil. Ils permettent de situer dans l'espace les objets fixes de l'environnement (distributeurs, dispositifs de bridage, ...) ainsi que les corps mobiles constitutifs du robot ou transportés par lui.

La notion de transformation de repère est donc fondamentale. Elle permet :

- d'exprimer les situations des différents corps du robot les uns par rapport aux autres ;
- de spécifier les situations que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser une tâche donnée ainsi que les vitesses correspondantes ;
- de décrire et de contrôler les efforts mis en jeu lorsque le robot interagit avec son environnement ;
- d'intégrer à la commande les informations sensorielles issues de capteurs ayant chacun son système de référence propre.

Nous présentons dans ce chapitre une notation qui permet de décrire de façon homogène les différents systèmes de coordonnées. Cette notation, les *transformations homogènes*, largement utilisée en informatique graphique [Roberts 65],

[Newman 79] pour calculer les projections et perspectives d'un objet sur un écran, est maintenant la plus répandue en robotique [Pieper 68], [Paul 81]. On montre comment représenter de cette façon un point, un vecteur libre et les transformations entre repères. On définit ensuite le torseur cinématique, le torseur dynamique, les transformations entre torseurs ainsi que les transformations différentielles.

2.2. Coordonnées homogènes

2.2.1. Représentation d'un point

Soit P un point de coordonnées cartésiennes p_x , p_y , p_z (figure 2.1). On appelle coordonnées homogènes du point P les termes $w.p_x$, $w.p_y$, $w.p_z$ et w où w est un facteur d'échelle, égal à 1 en robotique. On représente alors les coordonnées homogènes d'un point par le vecteur :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad [2.1]$$

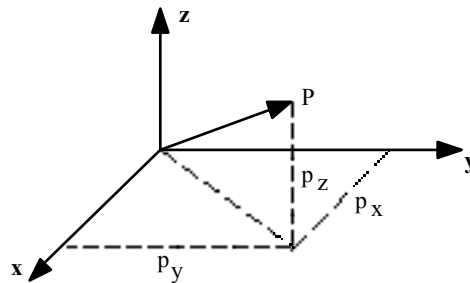


Figure 2.1. Représentation d'un point

2.2.2. Représentation d'une direction

La représentation d'une direction (vecteur libre) se fait aussi par quatre composantes, mais la quatrième est nulle, indiquant un point à l'infini. Si l'on note u_x , u_y , u_z les coordonnées cartésiennes d'un vecteur unitaire $\mathbf{u}$, en coordonnées homogènes on écrit :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2.2]$$

2.2.3. Représentation d'un plan

Le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est représenté par un vecteur ligne $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \quad [2.3]$$

Pour tout point P appartenant au plan $\mathbf{Q}$, le produit matriciel $\mathbf{Q} \mathbf{p}$ est nul :

$$\mathbf{Q} \mathbf{p} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad [2.4]$$

2.3. Transformations homogènes [Paul 81]

2.3.1. Transformation des repères

Faisons subir une transformation quelconque, de translation et/ou de rotation, au repère R_i , transformation qui l'amène sur le repère R_j (figure 2.2). Cette transformation est définie par la matrice ${}^i\mathbf{T}_j$, appelée matrice de transformation homogène, de dimension (4x4), telle que :

$${}^i\mathbf{T}_j = [{}^i\mathbf{s}_j \quad {}^i\mathbf{n}_j \quad {}^i\mathbf{a}_j \quad {}^i\mathbf{p}_j] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.5a]$$

où ${}^i\mathbf{s}_j$, ${}^i\mathbf{n}_j$ et ${}^i\mathbf{a}_j$ désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$ et $\mathbf{z}_j$ du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où ${}^i\mathbf{p}_j$ est le vecteur exprimant l'origine du repère R_j dans le repère R_i .

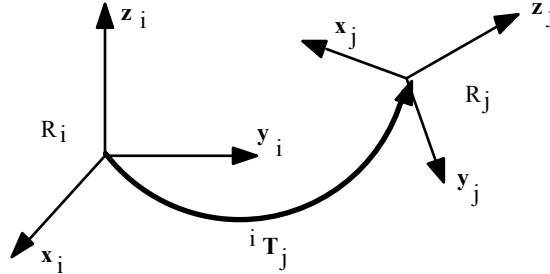


Figure 2.2. Transformation des repères

On dit également que la matrice ${}^i T_j$ définit le repère R_j dans le repère R_i . Par la suite, on notera souvent la matrice de transformation [2.5a] sous forme d'une matrice partitionnée :

$${}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^i A_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i s_j & {}^i n_j & {}^i a_j & {}^i P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.5b]$$

Il s'agit d'un abus de notation, puisque les vecteurs n'ont alors que trois composantes, mais cette description, en isolant la matrice d'orientation ${}^i A_j$, est parfois plus pratique. De toute manière, la distinction entre représentations à trois ou à quatre composantes sera toujours claire dans le contexte.

En résumé :

- la matrice ${}^i T_j$ représente la transformation permettant de passer du repère R_i au repère R_j ;
- elle peut être interprétée comme étant un repère R_j (trois axes orthonormés et l'origine) exprimé dans R_i .

2.3.2. Transformation des vecteurs

Soit un vecteur ${}^j \mathbf{p}_1$ définissant le point P_1 dans le repère R_j (figure 2.3). Compte tenu de la définition des coordonnées homogènes, on calcule les coordonnées du point P_1 dans le repère R_i grâce à l'équation suivante :

$${}^i \mathbf{p}_1 = {}^i(\mathbf{O}_i P_1) = {}^i s_j {}^j p_{1x} + {}^i n_j {}^j p_{1y} + {}^i a_j {}^j p_{1z} + {}^i P_j = {}^i T_j {}^j \mathbf{p}_1 \quad [2.6]$$

La matrice ${}^i T_j$ permet donc d'exprimer dans le repère R_i les coordonnées d'un point données dans le repère R_j .

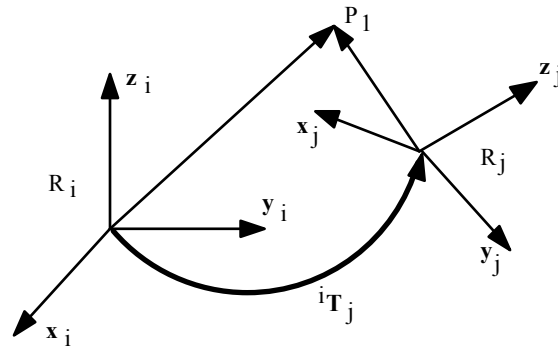


Figure 2.3. Transformation d'un vecteur

• **Exemple 2.1.** : en utilisant la formule [2.5a], déduire de la figure 2.4 les matrices ${}^i\mathbf{T}_j$ et ${}^j\mathbf{T}_i$. On obtient directement :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^j\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

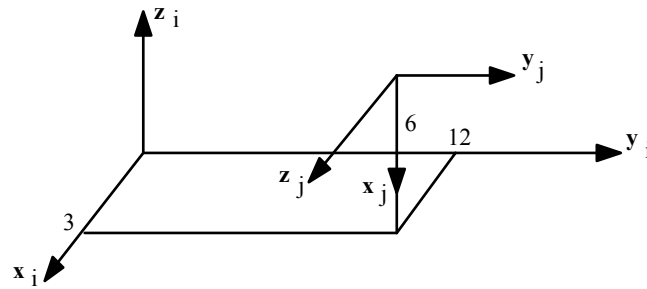


Figure 2.4. Exemple 2.1

2.3.3. Transformation des plans

La position relative d'un point par rapport à un plan est indépendante des transformations appliquées à l'ensemble {point, plan}. Ainsi :

$${}^j\mathbf{Q} {}^j\mathbf{p} = {}^i\mathbf{Q} {}^i\mathbf{p} = {}^i\mathbf{Q} {}^iT_j {}^j\mathbf{p}$$

Il s'ensuit que :

$${}^j\mathbf{Q} = {}^i\mathbf{Q} {}^iT_j \quad [2.7]$$

2.3.4. Matrice de transformation de translation pure

Soit **Trans**(a, b, c) cette transformation, où a, b, et c désignent les composantes de la translation le long des axes **x**, **y** et **z** respectivement. L'orientation étant conservée dans cette transformation, **Trans**(a, b, c) a pour expression (figure 2.5) :

$${}^iT_j = \mathbf{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.8]$$

Par la suite, on utilisera aussi la notation **Trans**(**u**, d) pour désigner une translation d'une valeur d le long d'un axe **u**. Ainsi, la matrice **Trans**(a, b, c) peut être décomposée en un produit de trois matrices **Trans**(**x**, a) **Trans**(**y**, b) **Trans**(**z**, c), l'ordre des multiplications étant quelconque.

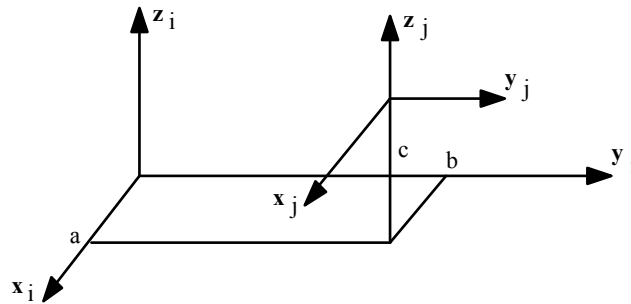


Figure 2.5. Transformation de translation pure

2.3.5. Matrices de transformation de rotation autour des axes principaux

2.3.5.1. Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour de l'axe **x**

Soit $\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \theta)$ cette rotation. On déduit de la figure 2.6 les composantes des vecteurs unitaires ${}^i\mathbf{s}_j$, ${}^i\mathbf{n}_j$, ${}^i\mathbf{a}_j$ portés respectivement par les axes $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$ et $\mathbf{z}_j$ du repère R_j et exprimés dans R_i . Si l'on note $S\theta$ et $C\theta$ les sinus et cosinus de θ respectivement, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{s}_j = [1 & 0 & 0 & 0]^T \\ {}^i\mathbf{n}_j = [0 & C\theta & S\theta & 0]^T \\ {}^i\mathbf{a}_j = [0 & -S\theta & C\theta & 0]^T \end{cases} \quad [2.9]$$

l'exposant T désignant la transposition. On obtient alors :

$${}^iT_j = \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{x}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.10]$$

$\mathbf{rot}(\mathbf{x}, \theta)$ désignant la matrice d'orientation de dimension (3x3).

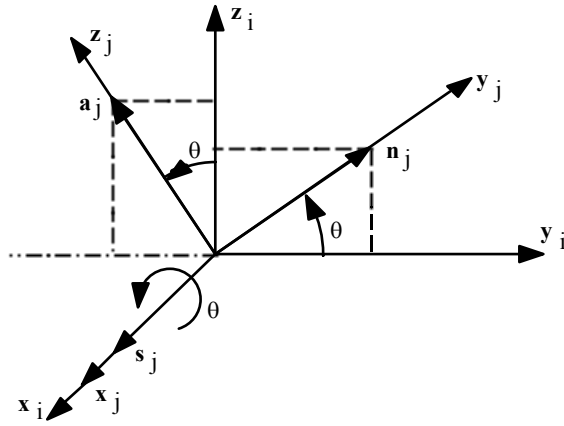


Figure 2.6. Transformation de rotation pure autour de l'axe x

2.3.5.2. Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour de l'axe y

Avec un raisonnement analogue, on obtient :

$${}^i\mathbf{T}_j = \mathbf{Rot}(\mathbf{y}, \theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{y}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.11]$$

2.3.5.3. Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour de l'axe $\mathbf{z}$

On vérifie que :

$${}^i\mathbf{T}_j = \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{z}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.12]$$

2.3.6. Propriétés des matrices de transformation homogène

a) Une matrice de transformation peut se mettre, d'après la relation [2.5b], sous la forme :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.13]$$

La matrice $\mathbf{A}$ représente la rotation alors que la matrice colonne $\mathbf{P}$ représente la translation. Pour une transformation de translation pure, $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$ ($\mathbf{I}_3$ représente la matrice unité d'ordre 3), tandis que pour une transformation de rotation pure, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Les éléments de la matrice $\mathbf{A}$ représentent les cosinus directeurs. Elle ne contient que trois paramètres indépendants (l'un des vecteurs $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ ou $\mathbf{a}$ se déduit du produit vectoriel des deux autres ; par exemple, $\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$; en outre, le produit scalaire $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ est nul et les normes de $\mathbf{n}$ et de $\mathbf{a}$ sont égales à 1).

b) La matrice $\mathbf{A}$ est orthogonale, c'est-à-dire que la matrice inverse est égale à la matrice transposée :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad [2.14]$$

c) L'inverse de la matrice ${}^i\mathbf{T}_j$ définit la matrice ${}^j\mathbf{T}_i$.

L'expression [2.6] donne les composantes du vecteur ${}^j\mathbf{p}_1$ dans le repère R_i . Inversement, pour exprimer les composantes du vecteur ${}^i\mathbf{p}_1$ dans le repère R_j , on écrit :

$${}^j\mathbf{p}_1 = {}^j\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{p}_1 \quad [2.15]$$

On peut aussi multiplier à gauche les termes de l'expression [2.6] par ${}^i\mathbf{T}_j^{-1}$, inverse de ${}^i\mathbf{T}_j$:

$${}^i\mathbf{T}_j^{-1} {}^i\mathbf{p}_1 = {}^j\mathbf{p}_1 \quad [2.16]$$

On déduit des relations [2.15] et [2.16] que :

$${}^i\mathbf{T}_j^{-1} = {}^j\mathbf{T}_i \quad [2.17]$$

d) On vérifie aisément que :

$$\mathbf{Rot}^{-1}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, -\theta) = \mathbf{Rot}(-\mathbf{u}, \theta) \quad [2.18]$$

$$\mathbf{Trans}^{-1}(\mathbf{u}, d) = \mathbf{Trans}(-\mathbf{u}, d) = \mathbf{Trans}(\mathbf{u}, -d) \quad [2.19]$$

e) L'inverse d'une matrice de transformation représentée par la relation [2.13] peut être calculée par :

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} & -\mathbf{s}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{n}^T \mathbf{P} \\ & -\mathbf{a}^T \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.20]$$

f) Composition de deux matrices

La multiplication de deux matrices de transformation donne une matrice de transformation :

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{P}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{P}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.21]$$

Il importe de se rappeler à ce propos que le produit de deux matrices de transformation n'est pas commutatif ($\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$).

g) Si un repère R_0 a subi k transformations consécutives (figure 2.7) et si chaque transformation i , ($i=1, \dots, k$), est définie par rapport au repère courant R_{i-1} , alors la transformation ${}^0\mathbf{T}_k$ peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$${}^0\mathbf{T}_k = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 \dots {}^{k-1}\mathbf{T}_k \quad [2.22]$$

h) Si un repère R_j , défini dans le repère R_i par la transformation ${}^i\mathbf{T}_j$, subit une transformation $\mathbf{T}$ exprimée dans le repère R_i , le repère R_j se transforme en $R_{j'}$ avec ${}^i\mathbf{T}_{j'} = \mathbf{T} {}^i\mathbf{T}_j$ (figure 2.8).

A partir des propriétés g et h, on déduit que :

- une multiplication à droite de la transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ signifie que la transformation est faite par rapport au repère courant R_j ;
- une multiplication à gauche signifie que la transformation est faite par rapport au repère de référence R_i .

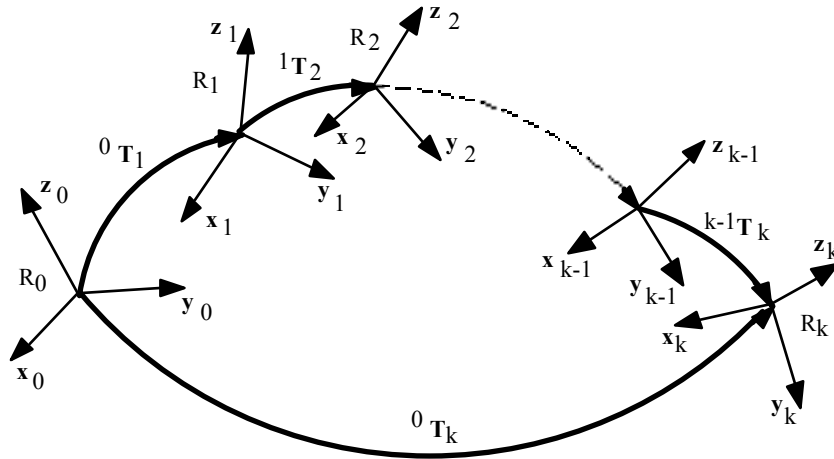


Figure 2.7. Composition des transformations : multiplication à droite

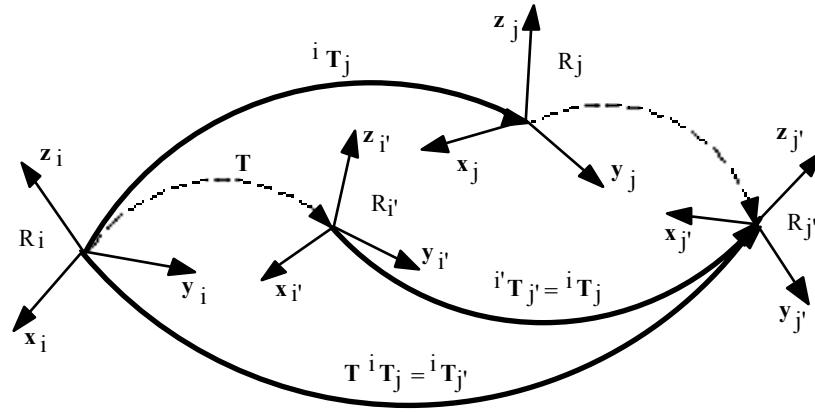


Figure 2.8. Composition des transformations : multiplication à gauche

• **Exemple 2.2.** Soit la transformation composée illustrée par la figure 2.9 et définie par :

$${}^0 T_2 = \text{Rot}(\mathbf{x}, \pi/6) \text{Trans}(\mathbf{y}, d)$$

- multiplication à droite (figure 2.9a) : on applique la rotation, puis la translation (lecture de gauche à droite de ${}^0 T_2$). La translation est appliquée sur le nouveau repère R_1 ;
- multiplication à gauche (figure 2.9b) : on applique la translation puis la rotation par rapport au repère R_0 (lecture de droite à gauche de ${}^0 T_2$).

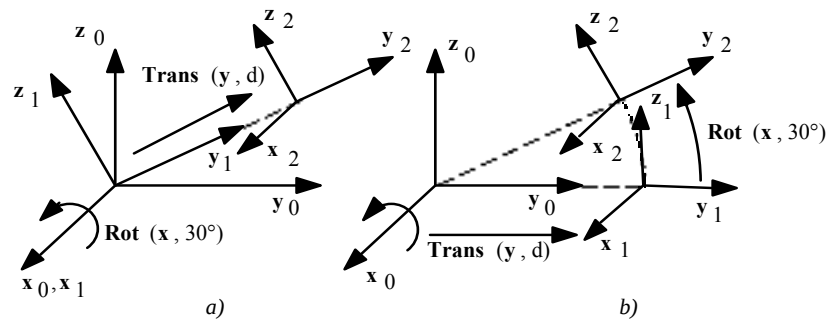


Figure 2.9. Exemple 2.2

i) Transformations consécutives autour du même axe

On retiendra les propriétés suivantes :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_1) \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_2) = \mathbf{Rot}[\mathbf{u}, (\theta_1 + \theta_2)] \quad [2.23]$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) \mathbf{Trans}(\mathbf{u}, d) = \mathbf{Trans}(\mathbf{u}, d) \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) \quad [2.24]$$

(le vecteur $\mathbf{u}$ étant inchangé par la rotation, on peut multiplier la translation à gauche ou à droite indifféremment).

j) Décomposition de la matrice de transformation

Une matrice de transformation peut se décomposer en deux matrices de transformation, l'une représentant une translation pure, l'autre une rotation pure :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.25]$$

2.3.7. Matrice de transformation correspondant à une rotation autour d'un vecteur passant par l'origine

Considérons maintenant une rotation $\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta)$ autour d'un axe portant un vecteur unitaire $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ passant par l'origine du repère R_i (figure 2.10). On définit le repère R_k de telle sorte que $\mathbf{z}_k$ soit porté par le vecteur $\mathbf{u}$ et que l'axe $\mathbf{x}_k$ soit selon la perpendiculaire commune à $\mathbf{z}_k$ et $\mathbf{z}_i$. La matrice ${}^i\mathbf{T}_k$ peut être obtenue par la composition des transformations suivantes :

$${}^i\mathbf{T}_k = \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \alpha) \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \beta) \quad [2.26]$$

où α est l'angle entre l'axe $\mathbf{x}_i$ et l'axe $\mathbf{x}_k$ autour de $\mathbf{z}_i$ et où β est l'angle entre $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{u}$ autour de $\mathbf{x}_k$.

En développant la relation [2.26], on obtient :

$$\mathbf{u} = {}^i\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\alpha S\beta \\ -C\alpha S\beta \\ C\beta \end{bmatrix} \quad [2.27]$$

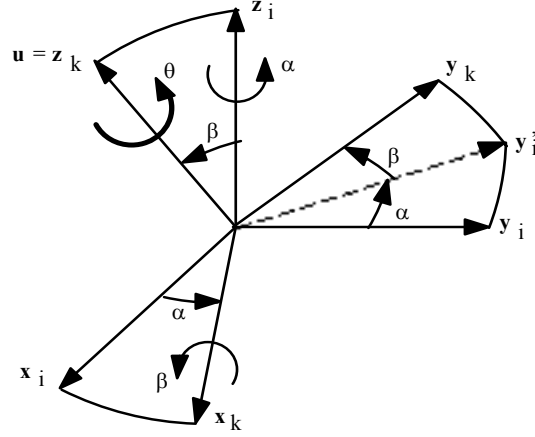


Figure 2.10. Transformation de rotation pure autour d'un axe quelconque

Tourner autour de $\mathbf{u}$ est équivalent à tourner autour de l'axe $\mathbf{z}$ du repère R_k . A partir des propriétés g et h du § 2.3.6, on déduit que :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) {}^i\mathbf{T}_k = {}^i\mathbf{T}_k \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta) \quad [2.28]$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) &= {}^i\mathbf{T}_k \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta) {}^i\mathbf{T}_k^{-1} \\ &= \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \alpha) \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \beta) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \theta) \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, -\beta) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, -\alpha) \end{aligned} \quad [2.29]$$

En développant cette formule et en utilisant le résultat [2.27], on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) &= \begin{bmatrix} & & 0 \\ & \mathbf{rot}(\mathbf{u}, \theta) & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_x^2(1-C\theta)+C\theta & u_x u_y(1-C\theta)-u_z S\theta & u_x u_z(1-C\theta)+u_y S\theta & 0 \\ u_x u_y(1-C\theta)+u_z S\theta & u_y^2(1-C\theta)+C\theta & u_y u_z(1-C\theta)-u_x S\theta & 0 \\ u_x u_z(1-C\theta)-u_y S\theta & u_y u_z(1-C\theta)+u_x S\theta & u_z^2(1-C\theta)+C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [2.30]$$

On retiendra plus facilement cette expression en exprimant la matrice d'orientation par :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{u} \mathbf{u}^T (1 - C\theta) + \mathbf{I}_3 C\theta + \hat{\mathbf{u}} S\theta \quad [2.31]$$

où $\hat{\mathbf{u}}$ désigne la matrice antisymétrique du *préproduit vectoriel* définie par :

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad [2.32]$$

Le produit vectoriel $\mathbf{u} \times \mathbf{V}$ s'obtient par la multiplication $\hat{\mathbf{u}} \mathbf{V}$.

2.3.8. Axe et angle de rotation équivalents à une rotation donnée

Soit $\mathbf{T}$ une matrice de transformation de rotation pure telle que :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & 0 \\ s_y & n_y & a_y & 0 \\ s_z & n_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.33]$$

On cherche à identifier les termes $\mathbf{u}$ et θ de l'expression suivante :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{T} \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi$$

D'après les expressions [2.30] et [2.33], en faisant la somme des termes diagonaux, on trouve :

$$C\theta = \frac{1}{2}(s_x + n_y + a_z - 1) \quad [2.34]$$

A partir des termes extradiagonaux, on obtient :

$$\begin{cases} 2 u_x S\theta = n_z - a_y \\ 2 u_y S\theta = a_x - s_z \\ 2 u_z S\theta = s_y - n_x \end{cases} \quad [2.35]$$

De la relation [2.35], on tire :

$$S\theta = \frac{1}{2} \sqrt{(n_z - a_y)^2 + (a_x - s_z)^2 + (s_y - n_x)^2} \quad [2.36]$$

Des relations [2.34] et [2.36], on déduit que :

$$\theta = \text{Arctg}(S\theta/C\theta) \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi \quad [2.37]$$

Le calcul de u_x , u_y et u_z se fait en utilisant l'équation [2.35] si $S\theta \neq 0$. Lorsque $S\theta$ est petit, les paramètres u_x , u_y et u_z ne sont pas déterminés avec précision par cette équation. Cependant, dans le cas où $C\theta < 0$, on obtient u_x , u_y et u_z par une méthode plus exacte en identifiant les termes de la diagonale principale de **Rot**(**u**, θ) avec ceux de la relation [2.33] :

$$u_x = \pm \sqrt{\frac{s_x - C\theta}{1 - C\theta}}, \quad u_y = \pm \sqrt{\frac{n_y - C\theta}{1 - C\theta}}, \quad u_z = \pm \sqrt{\frac{a_z - C\theta}{1 - C\theta}} \quad [2.38]$$

A partir des signes des termes de l'équation [2.35], on déduit que :

$$\begin{cases} u_x = \text{Sign}(n_z - a_y) \sqrt{\frac{s_x - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_y = \text{Sign}(a_x - s_z) \sqrt{\frac{n_y - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_z = \text{Sign}(s_y - n_x) \sqrt{\frac{a_z - C\theta}{1 - C\theta}} \end{cases} \quad [2.39]$$

où le symbole $\text{Sign}(\cdot)$ désigne la fonction signe de l'expression entre parenthèses.

• **Exemple 2.3.** Supposons que le repère R_n lié à l'organe terminal d'un robot soit dans une situation, par rapport au repère de référence, définie par la transformation **Rot**(**x**, $-\pi/4$). Trouver l'axe ${}^n\mathbf{u}$ et l'angle θ de rotation permettant d'amener le repère R_n dans la situation **Rot**(**y**, $\pi/4$) **Rot**(**z**, $\pi/2$). On écrit que :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, -\pi/4) \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{Rot}(\mathbf{y}, \pi/4) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \pi/2)$$

soit :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \pi/4) \mathbf{Rot}(\mathbf{y}, \pi/4) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \pi/2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après [2.34] et [2.36] : $C\theta = -\frac{1}{2}$, $S\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $\theta = 2\pi/3$.

D'après [2.35] : $u_x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $u_y = 0$, $u_z = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

2.4. Torseur cinématique

2.4.1. Définition

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode de description de la vitesse d'un solide dans l'espace fondée sur l'utilisation du torseur cinématique.

L'application qui à tout point O_i du corps C_i fait correspondre un vecteur $\mathbf{V}_i$ est appelée champ de vecteurs. Si ce vecteur est une vitesse, on parlera de champ des vitesses. Le champ des vitesses est antisymétrique, ce qui caractérise un torseur appelé torseur cinématique. On appelle éléments de réduction du torseur cinématique en O_i :

- $\mathbf{V}_i$: moment résultant en O_i , représentant la vitesse absolue de l'origine O_i par rapport à R_0 , tel que $\mathbf{V}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{O}_0\mathbf{O}_i)$;
- $\boldsymbol{\omega}_i$: résultante du torseur représentant le vecteur de rotation instantanée du corps C_i par rapport à R_0 .

La connaissance de ces deux éléments permet de calculer la vitesse d'un point O_j par la relation fondamentale suivante :

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{O}_i\mathbf{O}_j \quad [2.40]$$

où le symbole $\times$ désigne le produit vectoriel.

Les composantes de $\mathbf{V}_i$ et de $\boldsymbol{\omega}_i$ peuvent être concaténées pour composer le vecteur $\mathbb{V}_i$:

$$\mathbb{V}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i^T & \boldsymbol{\omega}_i^T \end{bmatrix}^T \quad [2.41]$$

Le vecteur $\mathbb{V}_i$ est appelé vecteur du torseur cinématique en O_i .

2.4.2. Matrice de transformation entre torseurs

Soit ${}^i\mathbf{V}_i$ et ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ les vecteurs représentant le torseur cinématique en O_i exprimés dans le repère R_i . On veut calculer les vecteurs ${}^j\mathbf{V}_j$ et ${}^j\boldsymbol{\omega}_j$ du torseur cinématique en O_j exprimés dans un repère R_j . En remarquant que :

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i \quad [2.42]$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{i,j} \quad [2.43]$$

$\mathbf{L}_{i,j}$ étant le vecteur d'origine O_i et d'extrémité O_j , on déduit que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\hat{\mathbf{L}}_{i,j} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad [2.44]$$

où $\mathbf{I}_3$ et $\mathbf{0}_3$ représentent respectivement la matrice unité et la matrice nulle de dimension (3x3). En projetant cette relation dans le repère R_i , on obtient :

$$\begin{bmatrix} {}^i\mathbf{V}_j \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\hat{{}^i\mathbf{P}_j} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{V}_i \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad [2.45]$$

En exprimant la relation [2.45] dans le repère R_j , on trouve :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{V}_j \\ {}^j\boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{A}_i & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^j\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\hat{{}^i\mathbf{P}_j} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{V}_i \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{A}_i & -{}^j\mathbf{A}_i \hat{{}^i\mathbf{P}_j} \\ \mathbf{0}_3 & {}^j\mathbf{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{V}_i \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [2.46]$$

relation qui peut être écrite sous la forme :

$${}^j\mathbb{V}_j = {}^j\mathbb{T}_i {}^i\mathbb{V}_i \quad [2.47]$$

où ${}^j\mathbb{T}_i$ est la matrice (6x6) de transformation entre torseurs.

On montre que la matrice de transformation entre torseurs a les propriétés suivantes :

i) produit :

$${}^0T_j = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{j-1}T_j \quad [2.48]$$

ii) inverse :

$${}^jT_1^{-1} = \begin{bmatrix} {}^iA_j & \hat{{}^iP_j} {}^iA_j \\ \mathbf{0}_3 & {}^iA_j \end{bmatrix} = {}^iT_j \quad [2.49]$$

2.5. Translation et rotation différentielles de repères

La transformation différentielle de la position et de l'orientation - ou situation - d'un repère R_i attaché à un corps quelconque, peut être exprimée en fonction d'un vecteur de translation différentielle $\mathbf{d}_i$ exprimant la translation de l'origine du repère R_i , et d'un vecteur de rotation différentielle δ_i égal à $\mathbf{u}_i d\theta$, représentant une rotation d'un angle $d\theta$ autour d'un axe portant un vecteur unitaire $\mathbf{u}_i$ et passant par l'origine O_i .

Etant donné une transformation iT_j , la transformation ${}^iT_j + \mathbf{d} {}^iT_j$ peut être calculée, compte tenu de la propriété h du § 2.3.6, par multiplication à gauche en fonction de ${}^i\mathbf{d}_i$ et ${}^i\mathbf{u}_i$ par la relation :

$${}^iT_j + \mathbf{d} {}^iT_j = \text{Trans}({}^idx_i, {}^idy_i, {}^idz_i) \text{Rot}({}^i\mathbf{u}_i, d\theta) {}^iT_j \quad [2.50]$$

La différentielle de iT_j est alors égale à :

$$\mathbf{d} {}^iT_j = [\text{Trans}({}^idx_i, {}^idy_i, {}^idz_i) \text{Rot}({}^i\mathbf{u}_i, d\theta) - \mathbf{I}_4] {}^iT_j \quad [2.51]$$

De même, la transformation ${}^iT_j + \mathbf{d} {}^iT_j$ peut être calculée par multiplication à droite en fonction de ${}^j\mathbf{d}_j$ et ${}^j\mathbf{u}_j$ par la relation :

$${}^iT_j + \mathbf{d} {}^iT_j = {}^iT_j \text{Trans}({}^jdx_j, {}^jdy_j, {}^jdz_j) \text{Rot}({}^j\mathbf{u}_j, d\theta) \quad [2.52]$$

et la différentielle devient :

$$\mathbf{d} {}^iT_j = {}^iT_j [\text{Trans}({}^jdx_j, {}^jdy_j, {}^jdz_j) \text{Rot}({}^j\mathbf{u}_j, d\theta) - \mathbf{I}_4] \quad [2.53]$$

On définit la matrice de transformation différentielle, notée Δ , par :

$$\Delta = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(\mathbf{u}, d\theta) - \mathbf{I}_4] \quad [2.54]$$

de telle sorte que :

$${}^d {}^i T_j = {}^i \Delta {}^i T_j [2.55]$$

ou bien :

$${}^d {}^i T_j = {}^i T_j {}^j \Delta [2.56]$$

En supposant $d\theta$ suffisamment petit pour que les approximations $S(d\theta) = d\theta$ et $C(d\theta) = 1$ soient valides, la matrice de transformation de rotation pure d'un angle $d\theta$ autour d'un axe de vecteur unitaire $\mathbf{u}$ se calcule à partir de la relation [2.30] et en utilisant [2.54] :

$${}^j \Delta = \begin{bmatrix} {}^j \hat{\delta}_j & {}^j \mathbf{d}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j \hat{\mathbf{u}}_j d\theta & {}^j \mathbf{d}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [2.57]$$

où $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\delta}$ représentent respectivement les matrices des préproduits vectoriels de $\mathbf{u}$ et de δ .

On remarque que la matrice de transformation entre torseurs permet aussi de transformer les vecteurs de translation et rotation différentielles entre repères :

$$\begin{bmatrix} {}^j \mathbf{d}_j \\ {}^j \delta_j \end{bmatrix} = {}^j T_1 \begin{bmatrix} {}^i \mathbf{d}_i \\ {}^i \delta_i \end{bmatrix} \quad [2.58]$$

Par analogie avec le torseur cinématique, on dénommera *torseur différentiel* la concaténation de $\mathbf{d}_i$ et de δ_i .

• **Exemple 2.4.** Considérons la situation, fréquente en robotique, dans laquelle on veut commander les déplacements d'un mécanisme à partir de son modèle différentiel exprimé dans un repère R_n associé au corps terminal (figure 2.11). Le modèle différentiel permet de calculer les incréments articulaires à appliquer pour réaliser les déplacements élémentaires de R_n désirés. Or, bien souvent, la tâche du robot est décrite non pas dans R_n mais dans un repère outil R_E fixé également au corps terminal. Connaissant ${}^E \mathbf{d}_E$ et ${}^E \delta_E$, le problème est donc de calculer ${}^n \mathbf{d}_n$ et ${}^n \delta_n$.

Supposons que la transformation décrivant le repère outil dans le repère R_n soit :

$${}^n\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et que le déplacement élémentaire désiré ait pour valeur :

$${}^E\mathbf{d}_E = [0 \quad 0 \quad -0,01]^T, \quad {}^E\boldsymbol{\delta}_E = [0 \quad -0,05 \quad 0]^T$$

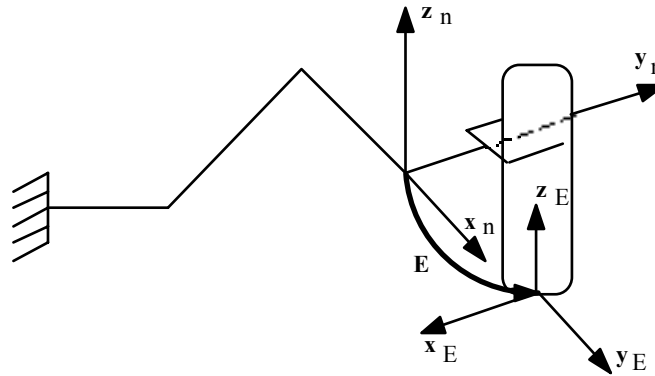


Figure 2.11. Exemple 2.4

En utilisant la relation [2.58], on obtient :

$${}^n\boldsymbol{\delta}_n = {}^n\mathbf{A}_E {}^E\boldsymbol{\delta}_E, \quad {}^n\mathbf{d}_n = {}^n\mathbf{A}_E ({}^E\boldsymbol{\delta}_E \mathbf{x}^E \mathbf{P}_n + {}^E\mathbf{d}_E)$$

L'application numérique donne alors :

$${}^n\mathbf{d}_n = [0 \quad 0,015 \quad -0,005]^T, \quad {}^n\boldsymbol{\delta}_n = [-0,05 \quad 0 \quad 0]^T$$

D'une façon analogue, on peut aussi évaluer l'influence d'une erreur de position et d'orientation de l'organe terminal sur la situation de l'outil. Supposons que l'on ait une borne de l'erreur de position de 10 mm dans toutes les directions et que l'on estime à 0,01 radian l'erreur de rotation autour de $\mathbf{x}$:

$${}^n\mathbf{d}_n = [0,01 \quad 0,01 \quad 0,01]^T, \quad {}^n\boldsymbol{\delta}_n = [0,01 \quad 0 \quad 0]^T$$

L'erreur propagée jusqu'à l'outil se calcule par :

$${}^E\delta_E = {}^E\mathbf{A}_n {}^n\delta_n, \quad {}^E\mathbf{d}_E = {}^E\mathbf{A}_n ({}^n\delta_n \times {}^n\mathbf{P}_E + {}^n\mathbf{d}_n)$$

D'où le résultat :

$${}^E\mathbf{d}_E = \begin{bmatrix} -0,013 & 0,01 & 0,011 \end{bmatrix}^T, \quad {}^E\delta_E = \begin{bmatrix} 0 & 0,01 & 0 \end{bmatrix}^T$$

2.6. Torseur dynamique

Un effort en O_i est représenté par un torseur dynamique $\mathbb{f}_i$ dont la résultante est la force $\mathbf{f}_i$ et le moment autour de O_i est $\mathbf{m}_i$:

$$\mathbb{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \end{bmatrix} \quad [2.59]$$

On peut aussi interpréter l'effort $\mathbb{f}_i$ comme étant une force $\mathbf{f}_i$ au point O_i et un couple $\mathbf{m}_i$.

Etant donné un effort ${}^i\mathbb{f}_i$, exprimé dans un repère R_i associé à un corps quelconque, pour calculer l'effort équivalent ${}^j\mathbb{f}_j$ exprimé dans un repère R_j du même corps, on utilise la matrice de transformation entre torseurs de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} {}^j\mathbf{m}_j \\ {}^j\mathbf{f}_j \end{bmatrix} = {}^j\mathbb{T}_i \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{m}_i \\ {}^i\mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad [2.60]$$

Après développement, l'équation [2.60] s'écrit :

$${}^j\mathbf{f}_j = {}^j\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{f}_i \quad [2.61]$$

$${}^j\mathbf{m}_j = {}^j\mathbf{A}_i ({}^i\mathbf{f}_i \times {}^i\mathbf{P}_j + {}^i\mathbf{m}_i) \quad [2.62]$$

Il est souvent plus pratique d'interchanger l'ordre de $\mathbf{f}_i$ et $\mathbf{m}_i$. Dans ce cas, la relation [2.60] devient :

$$\begin{bmatrix} {}^j\mathbf{f}_j \\ {}^j\mathbf{m}_j \end{bmatrix} = {}^i\mathbb{T}_j^T \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{f}_i \\ {}^i\mathbf{m}_i \end{bmatrix} \quad [2.63]$$

• **Exemple 2.5.** On considère la matrice de passage ${}^n\mathbf{T}_E$ décrivant la situation du repère outil d'un robot :

$${}^n\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On désire avec cet outil exercer un effort ${}^E\mathbf{f}_E$ de composantes ${}^E\mathbf{f}_E = [0 \ 0 \ 5]^T$ et ${}^E\mathbf{m}_E = [0 \ 0 \ 3]^T$. Calculer à l'origine O_n et dans le repère R_n les composantes de l'effort correspondant ${}^n\mathbf{f}_n$.

En appliquant les relations [2.61] et [2.62], on écrit que :

$${}^n\mathbf{f}_n = {}^n\mathbf{A}_E {}^E\mathbf{f}_E$$

$${}^n\mathbf{m}_n = {}^n\mathbf{A}_E ({}^E\mathbf{f}_E \times {}^E\mathbf{P}_n + {}^E\mathbf{m}_E)$$

L'application numérique conduit à :

$${}^n\mathbf{f}_n = [0 \ 0 \ 0,5]^T$$

$${}^n\mathbf{m}_n = [0,5 \ 0 \ 3]^T$$

2.7. Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation des matrices de transformation homogènes. Cette notation est à la base de la modélisation du robot et son environnement. D'autres techniques de représentation des transformations ont été utilisées en robotique : les quaternions [Yang 66], [Castelain 86], les matrices de rotation (3x3) [Coiffet 81], des méthodes fondées sur la formule de Rodrigues [Wang 83]. Nous renvoyons le lecteur à ces références pour un exposé détaillé de ces techniques.

Nous avons ensuite rappelé quelques notions sur les torseurs, les matrices de transformations entre torseurs, ainsi que sur les transformations différentielles, notions que nous utiliserons beaucoup dans la suite de cet ouvrage.

Nous abordons dans les chapitres suivants le problème de la modélisation des robots-manipulateurs.