

Robotique industrielle



M.CHERIF
mehdi.cherif@ensam.eu

Activités autour de la robotique

- 1 cours en amphi
- 1 tp programmation HL Robotstudio
- 1 mini projet Robotstudio
- 1 tp Programmation manuelle (iiwa)



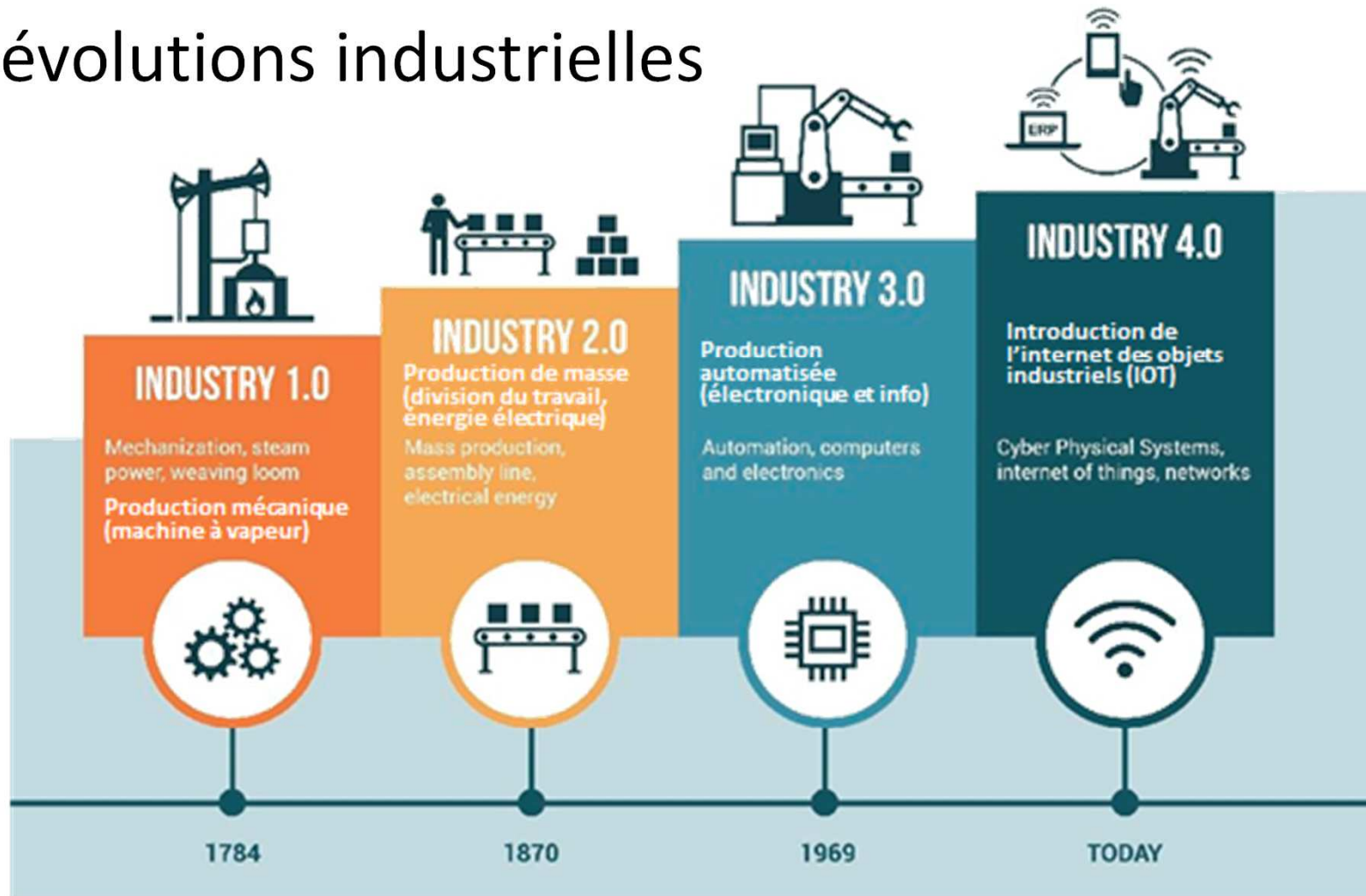
M.CHERIF
mehdi.cherif@ensam.eu

Robotique industrielle



M.CHERIF
mehdi.cherif@ensam.eu

- Révolutions industrielles

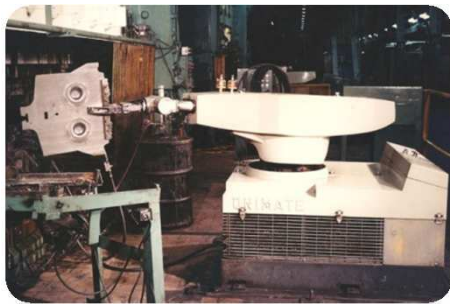


Arrivée robots

Robotique mobile et cobotique

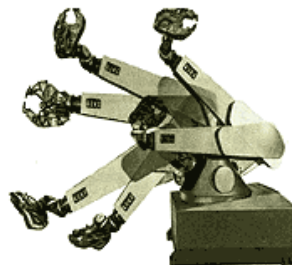
Source : Aberdeen Group

Quelques dates...



1961: 1^{er} robot industriel: **Unimate** (General Motors)

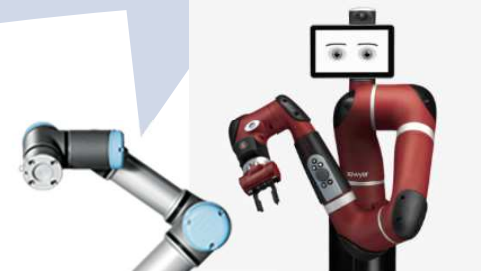
1973: 1^{er} robot 6 axes: **Famulus** (Kuka)



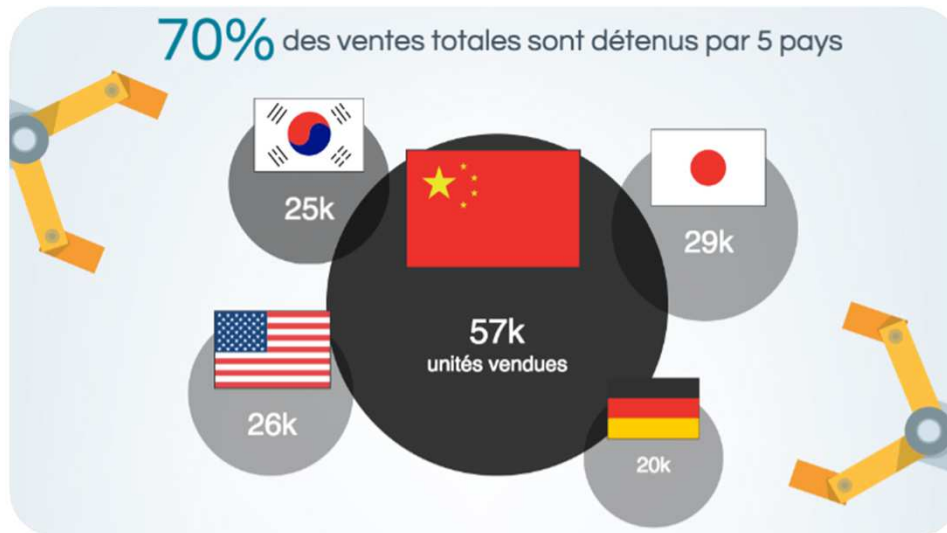
1985: 1^{er} robot avec un bras de manipulation formé de 3 parallélogrammes: **Delta**



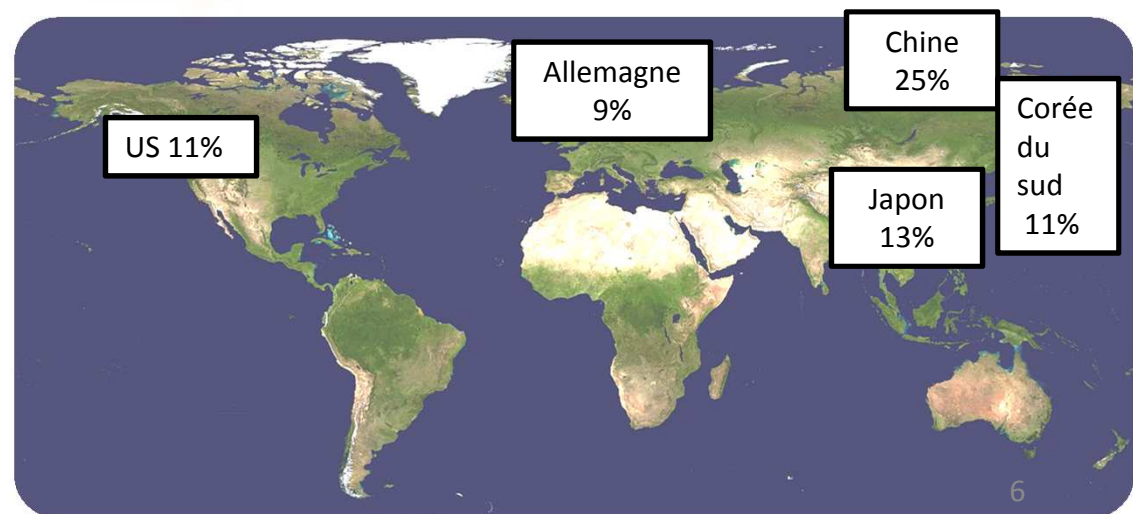
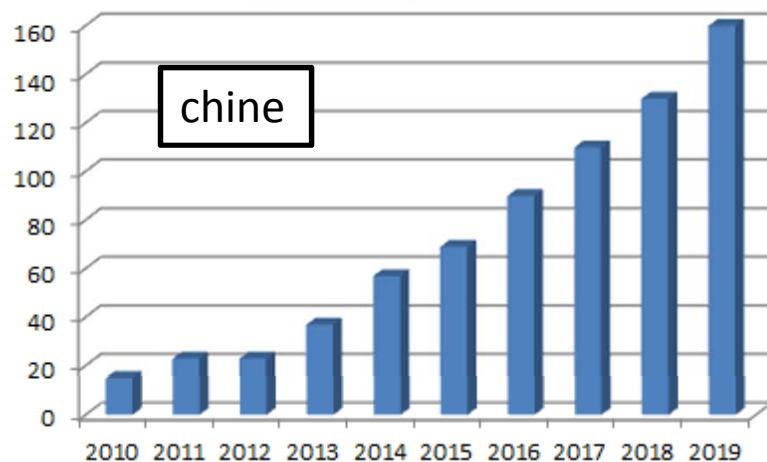
2015: l'arrivée des Robots collaboratifs



Quelques chiffres



Approvisionnement annuel des robots industriels



La robotique en générale

Domaine de l'exploration

- Accès difficile
- Nettoyage
- Espace
- Démantèlement nucléaire
- Déminage
- Chantier sous marin



Domaine du médical

- Assistance aux opérations chirurgicales
- Robotique médicale



atlas

Domaine de service

- Robots humanoïdes

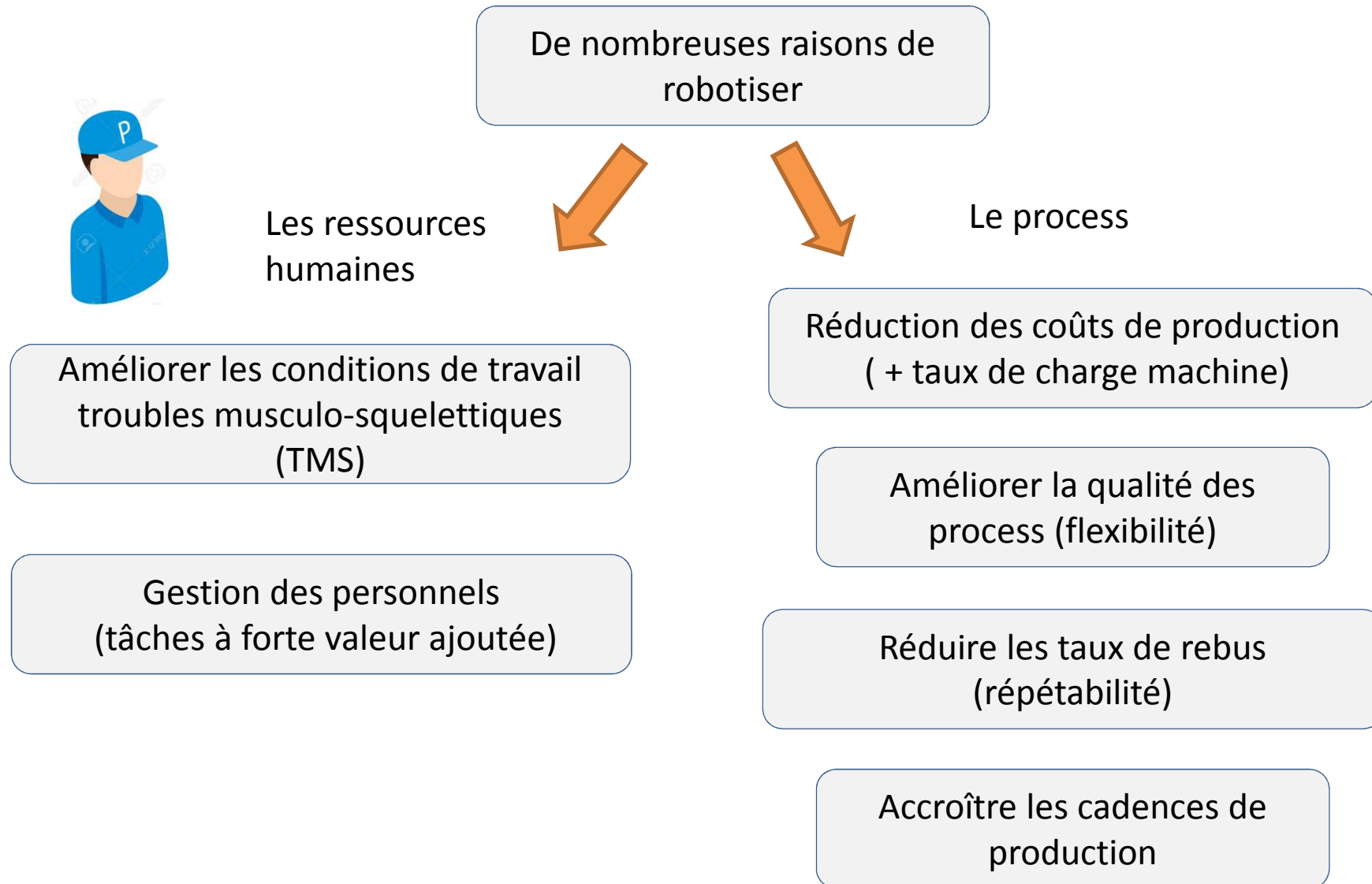


Domaine industriel

- Robots industriels
- cobots



Les enjeux de la robotisation



Domaines d'applications de la robotique industrielle

Soudure Points



Manutention



Montage



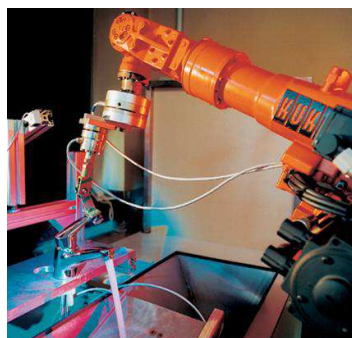
Assemblage



Polissage



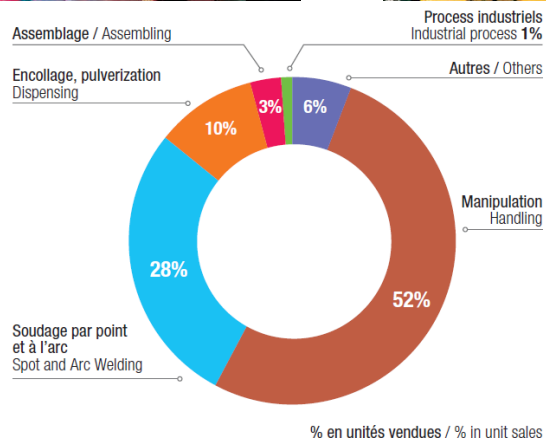
Contrôle



Palettisation



Façonnage



Deux applications majeurs

- 52 % manipulateur
- 28 % soudage par point

Source KUKA Robot Group

Les robots industriels

Quelques exemples

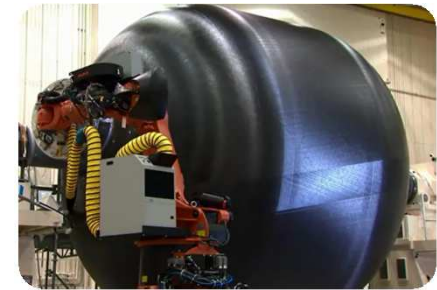
Assemblage cobotique



bmw



Domaine spatial



Domaine aéronautique

Répétabilité
Gestion du couple de serrage



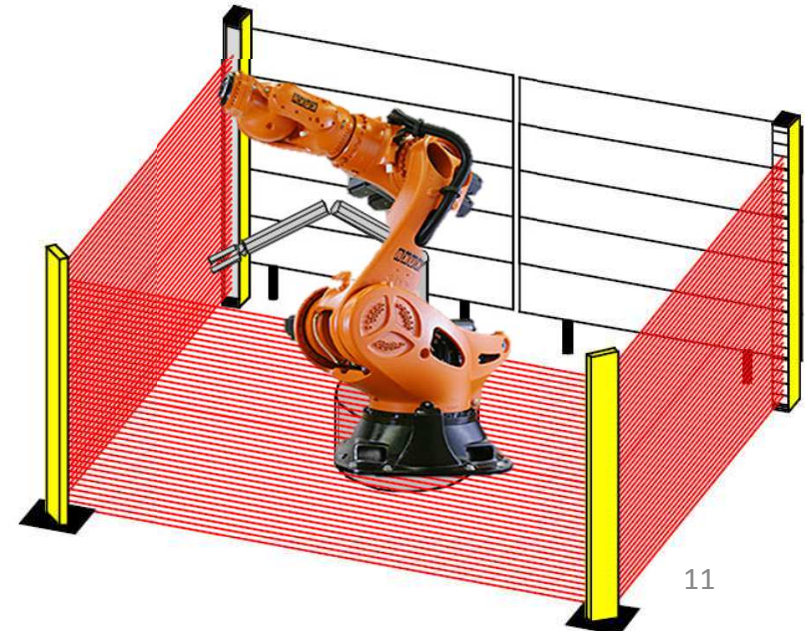
Gestion épaisseur
peinture
Environnement toxique



foil

Les robots industriels

- Atout
 - Charge embarquée variant de 500g à 2800kg
 - Large rayon d'action (5m)
 - Répétabilité
 - Cadence de production (vitesse 2m/s)
- Limitations
 - Sécurité matérielle
 - Intégration complexe
 - Pas d'interaction homme/robot
 - Faible flexibilité des cellules



Différentes architectures



DELTA



4 AXES

ANTHROPOMORPHES



6 AXES

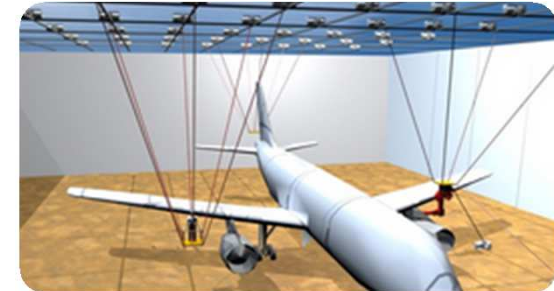


CARTESIEN

Famille_robot



<http://www.cablebot.eu/en/>



ROBOT A CABLES

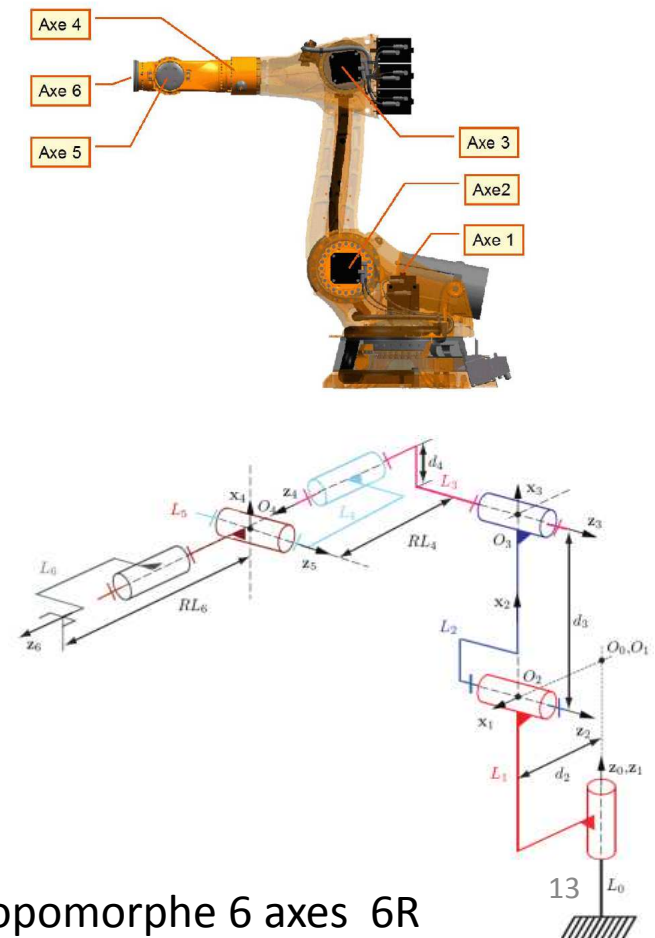
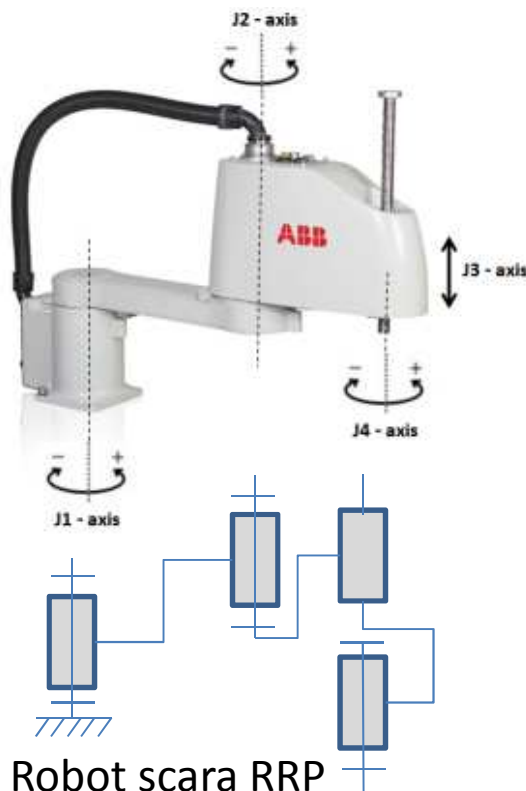


SCARA



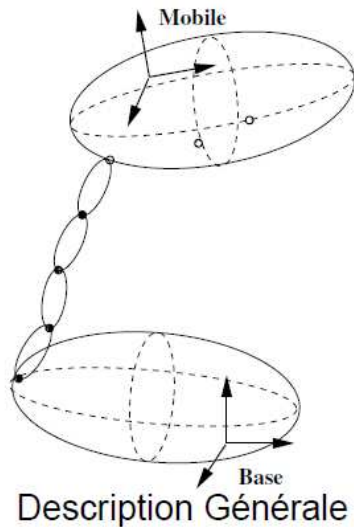
Exemple des robots

- Scara PRR
- Cartésien (PPP)
- Anthropomorphique 6R



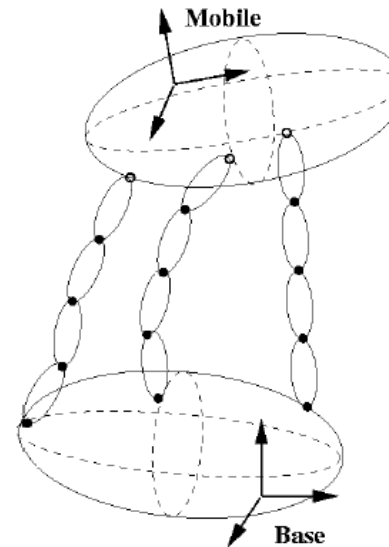
Les robots sériels

Architecture de type chaîne ouverte

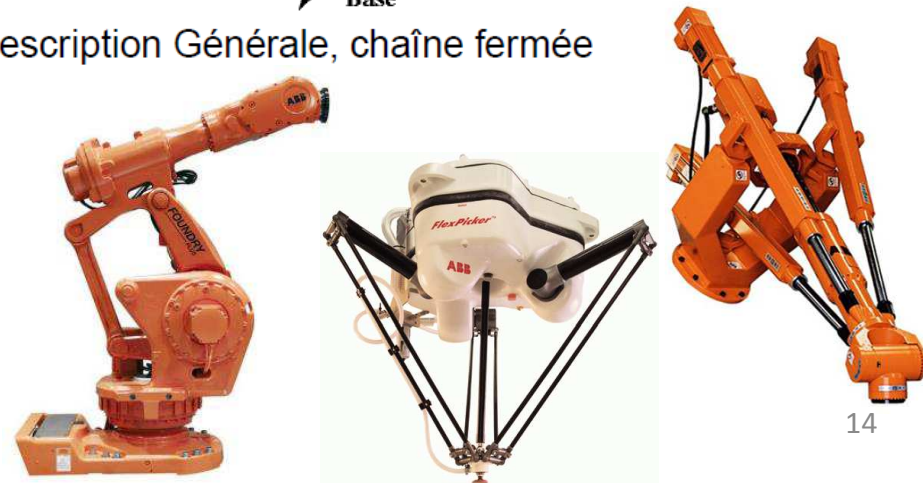


Les robots parallèles

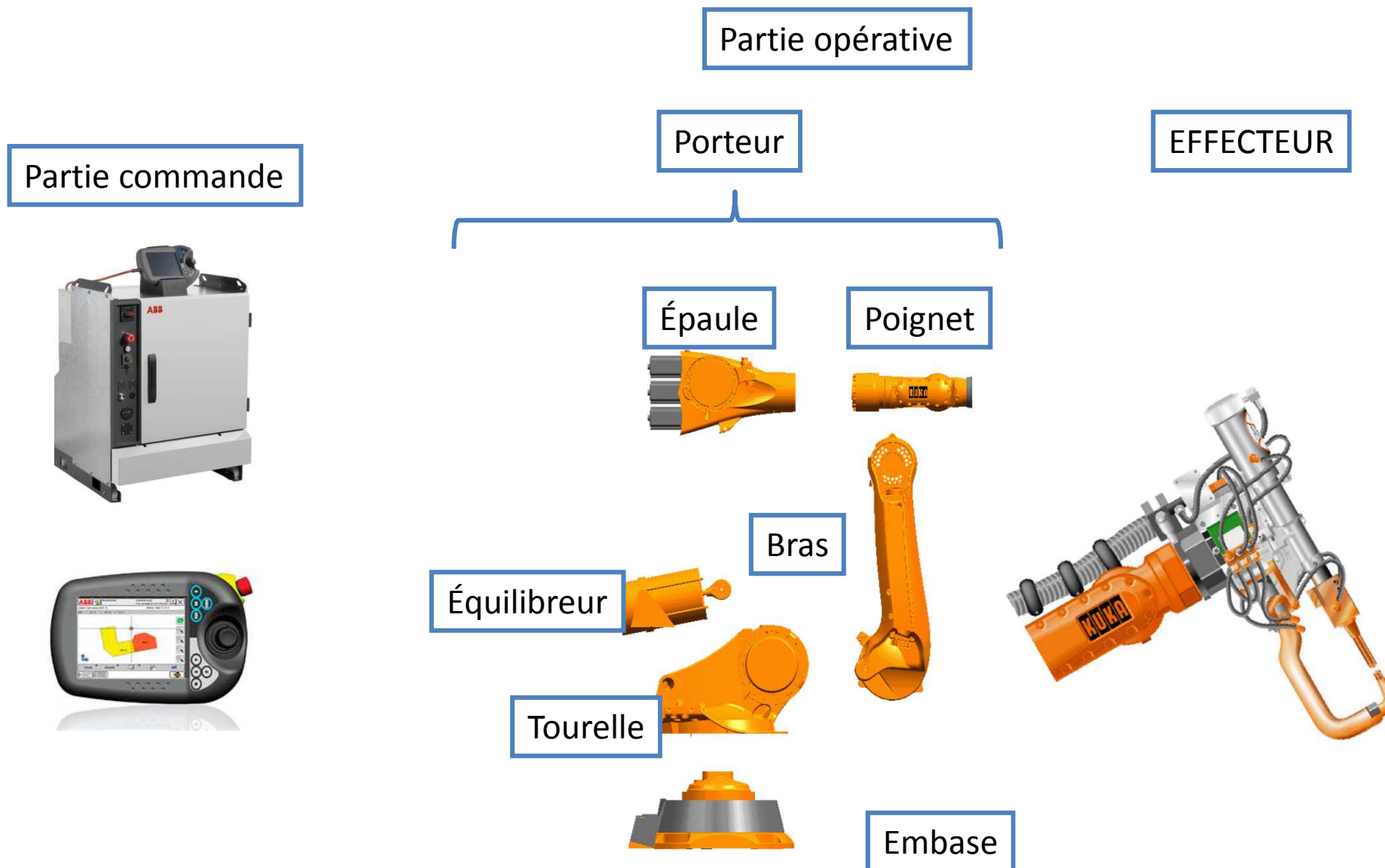
Architecture de type chaîne fermée



Description Générale, chaîne fermée



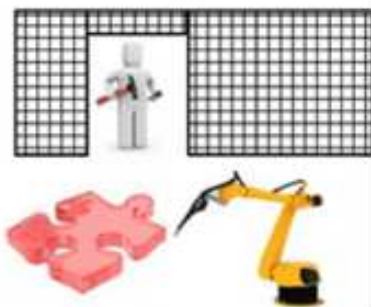
Vocabulaire



Une tendance forte

Interaction croissante entre l'opérateur et le robot

Ilot robotisé
« standard »



Ilot robotisé
« flexible »



Ilot robotisé
collaboratif



Robot mobile



Cobot

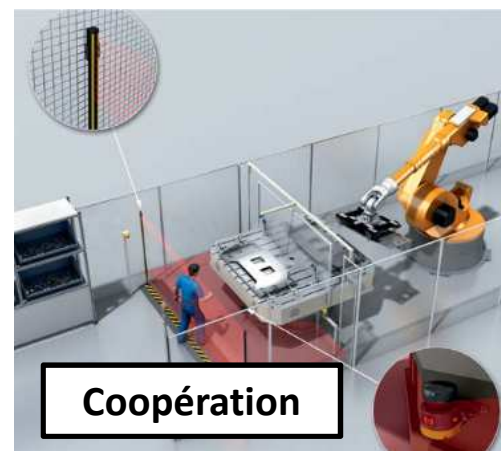


Espace de travail différent

Espace de travail partagé

Période
différente

PAS
d'INTERACTION



Période
commune

Coexistence

Collaboration

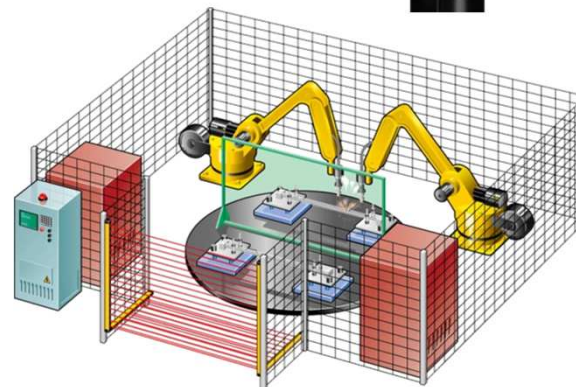
Les cobots (Collaborative Robot)

✓ Atouts

- Suppression des contraintes de sécurité Matérielle
- Travail collaboratif Homme/cobot
- Intégration et programmation simple
- Dextérité

✓ Limitations

- Très faible capacité de charge
- Faible rayon d'action



Caractéristiques	ROBOT	COBOT
Charge utile	+++	+
Zone de travail	+++	+
Précision de positionnement	+++	++
Vitesse	+++	+
Interaction Homme / robot (sécurité)	+	+++
Simplicité de programmation	++	+++
"Plug & produce" en production	+	+++
Diversité des tâches (flexibilité)	++	+++



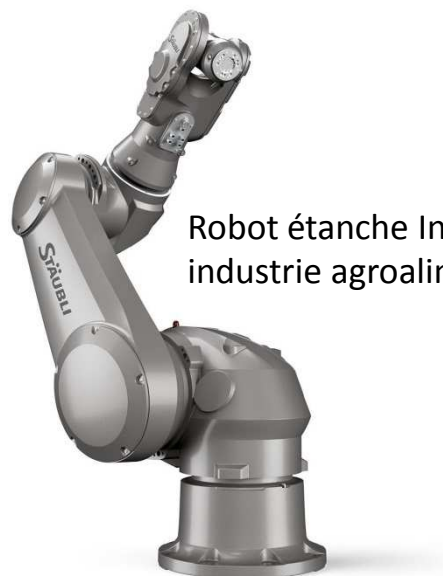
VS



Critères de choix d'un robot industriel

Les critères à prendre en compte pour le choix d'un robot:

1. Capacité de charges (50g→3000kg)
2. Rayon d'action
3. Type de montage
4. Indice de protection
5. Nombre d'axes externes



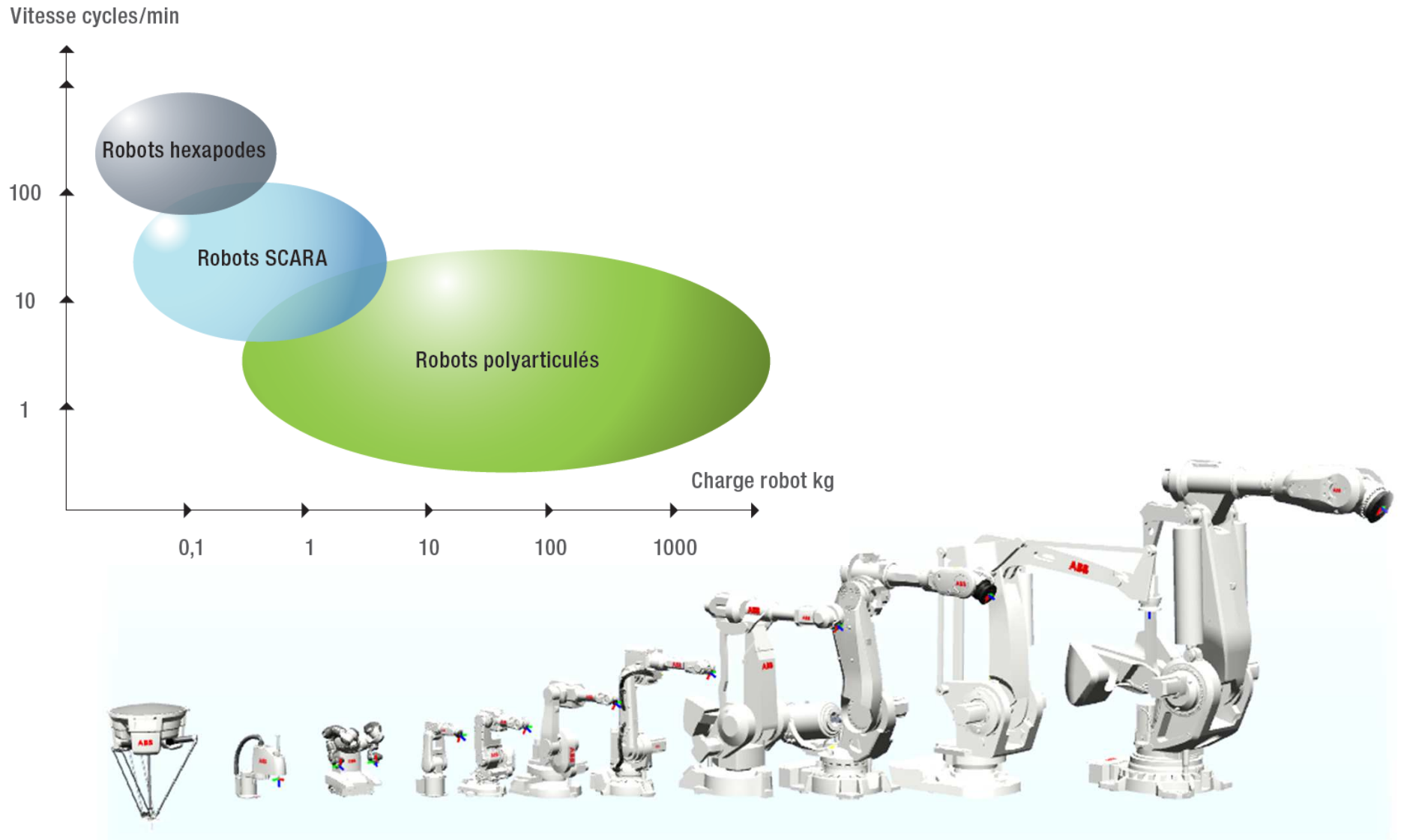
Robot étanche Inox pour industrie agroalimentaire



Lucas track



Capacité de charge selon l'architecture

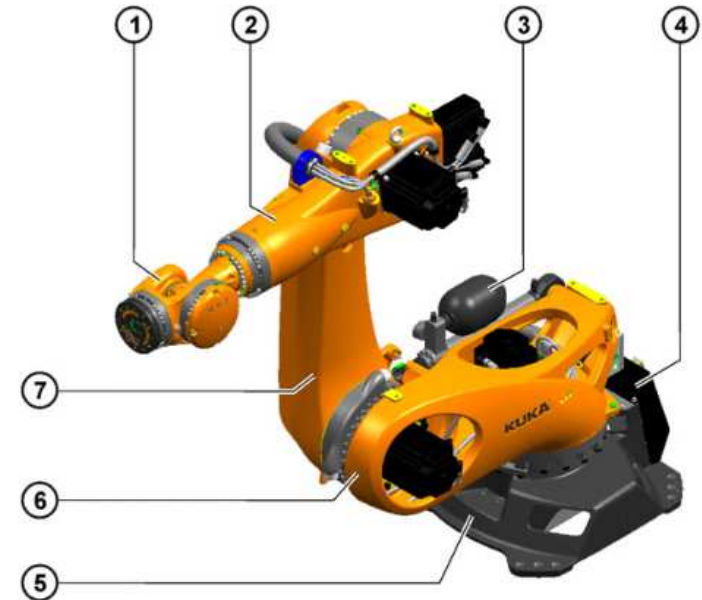


Critère de choix : Capacité de charge

1 kg



2800 kg



Notion de bras de levier

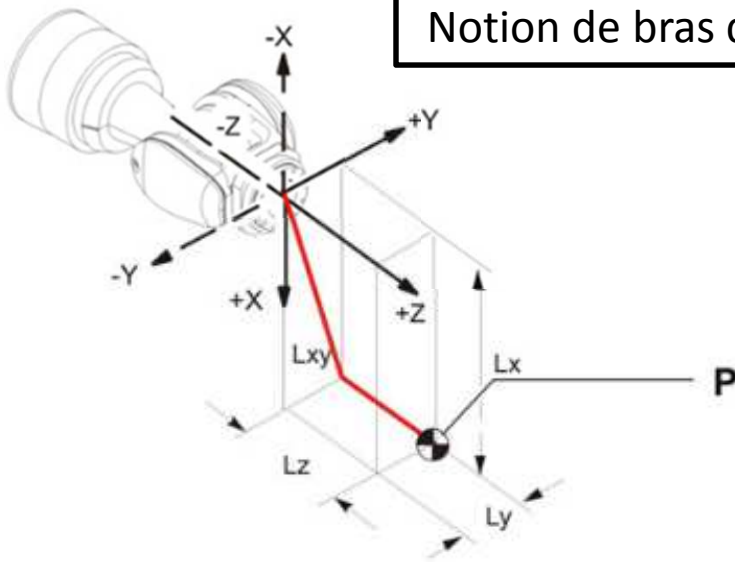
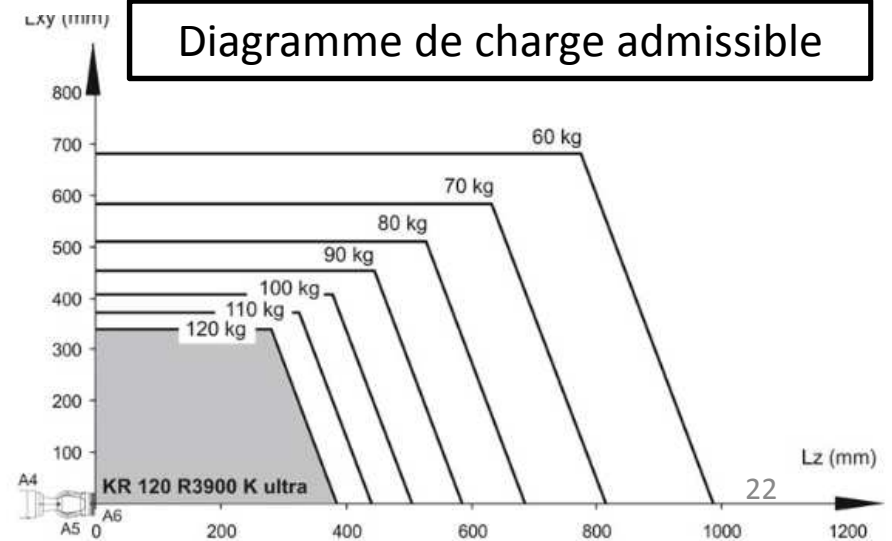


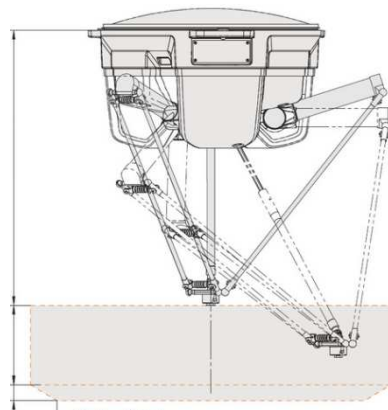
Diagramme de charge admissible



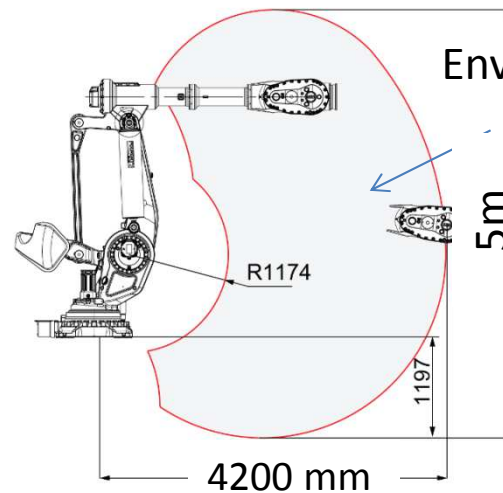
Critère de choix : le rayon d'action

Le rayon d'action et la géométrie de la zone de travail accessible sont fonction de :

- La cinématique
- Le modèle de robot



800 mm



Enveloppe de travail

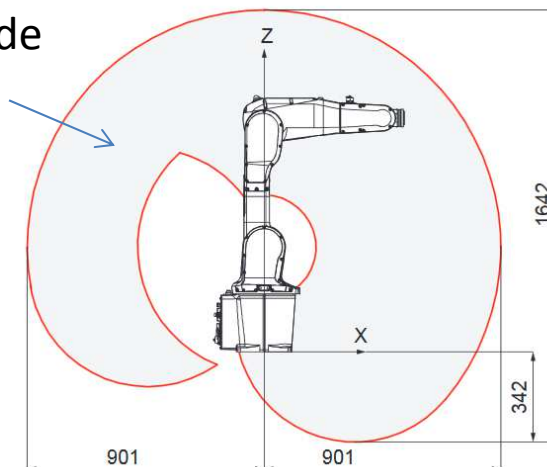
5m

4200 mm

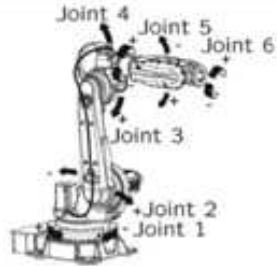
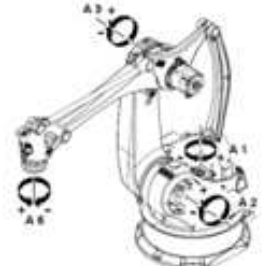
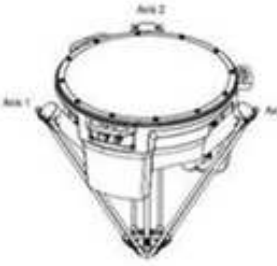
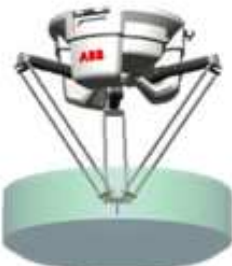
R1174

1197

IRB 1200 5/0.9, working range

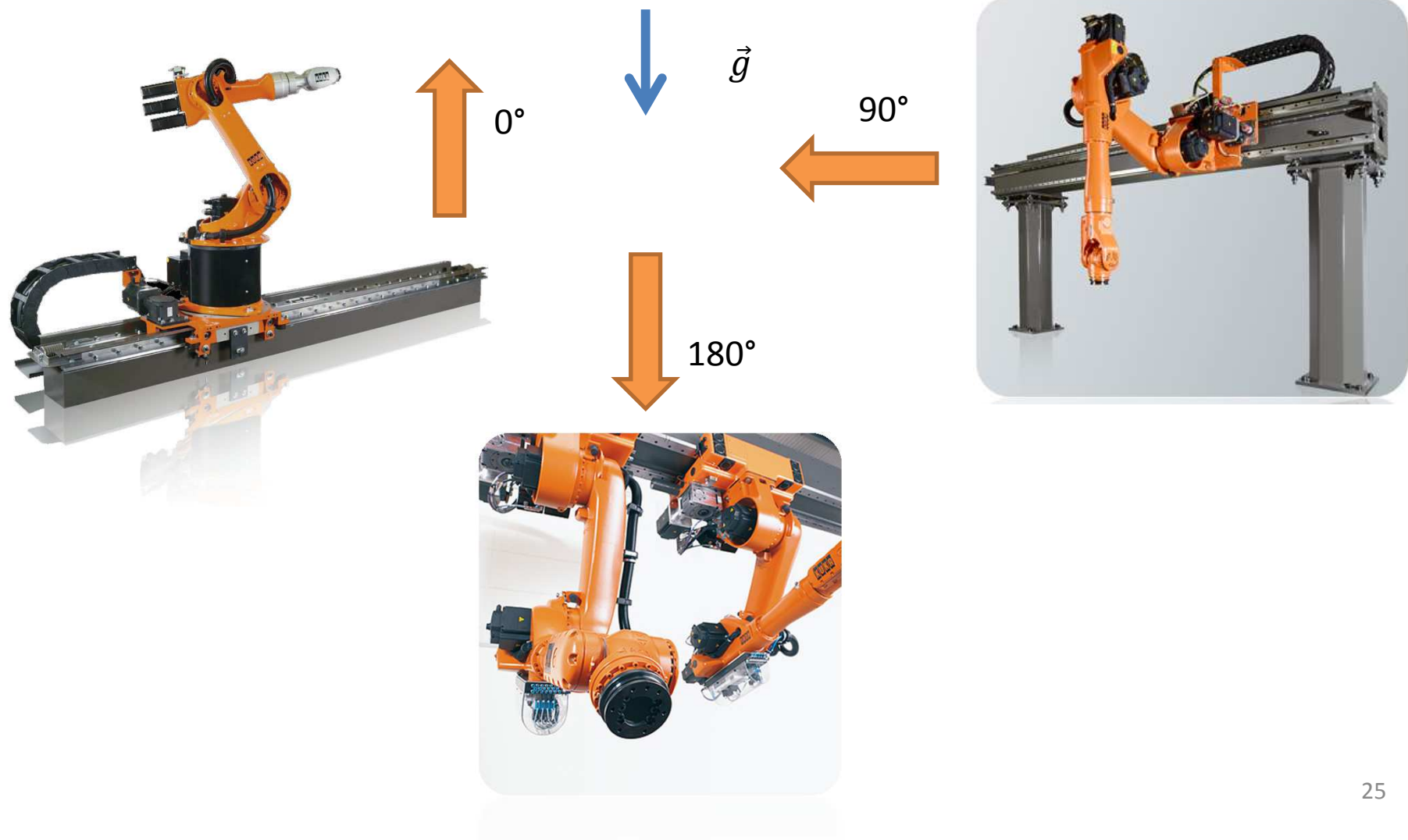


Critère de choix : rayon d'action

Désignation	Cinématique	Enveloppe de travail		Photo
ANTHROPOMORPHE 6_AXES				
ANTHROPOMORPHE 4_AXES				
SCARA				
DELTA				

Sens de montage du robot

Selon les modèles toutes les orientations de montage ne sont pas possibles



Critère de choix : indice de protection

Indice de protection : il est constitué de deux chiffres et permet de définir la protection d'un système vis-à-vis de la pénétration de :

- La poussière
- De l'eau

poussière
eau
IP 5 4

Robot fonderie



Premier chiffre: protection des équipements électriques contre la pénétration de corps solides (y compris la poussière)	Deuxième chiffre : protection des équipements électriques contre la pénétration d'eau
0 non protégé	0 non protégé
1 diamètre ≥ 50 mm	1 gouttes d'eau verticales
2 diamètre $\geq 12,5$ mm	2 gouttes d'eau (15° d'inclinaison)
3 diamètre $\geq 2,5$ mm	3 pluie
4 diamètre ≥ 1 mm	4 projection d'eau
5 protégé contre la poussière	4K projection sous pression
6 étanche à la poussière	5 projection à la lance
	6 projection puissante à la lance
	6K projection puissante sous pression
	7 immersion temporaire
	8 immersion prolongée
	9K nettoyage à haute pression / jet de vapeur

IP 2 3

0	Pas de protection contre contact physique et pénétration d'objets	Pas de protection contre eau.	0
1	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - mains nues. Protection contre corps étranger 50 mm de diamètre ou plus grand.	Protection contre gouttes d'eau.	1
2	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - doigts. Protection contre corps étranger 12,5 mm de diamètre ou plus grand.	Protection contre gouttes d'eau, inclinaison du capot jusqu'à 15 degrés du vertical - chaque côté.	2
3	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - outils. Protection contre corps étranger 2,5 mm de diamètre ou plus grand.	Protection contre douche d'eau, inclinaison du capot jusqu'à 60 degrés du vertical - chaque côté.	3
4	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - fil de fer. Protection contre corps étranger 1 mm de diamètre ou plus grand.	Protection contre éclaboussures d'eau - chaque direction	4
5	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - fil de fer. Protection contre poussière (sable, poussière routière etc.).	Protection contre torrent d'eau (12,5 l/min)- verse sur le capot de chaque direction.	5
6	Protection contre contact physique avec éléments dangereux - fil de fer. Protection contre poussière - capot antipoussière (sable, poussière routière etc.).	Protection contre torrent d'eau grande force - (100 l/min)- verse sur le capot de chaque direction	6
		Protégé contre les effets de l'immersion.	7
		Protégé contre les effets prolongés de l'immersion sous pression.	8



Robot de lavage

Exemple de fiche technique

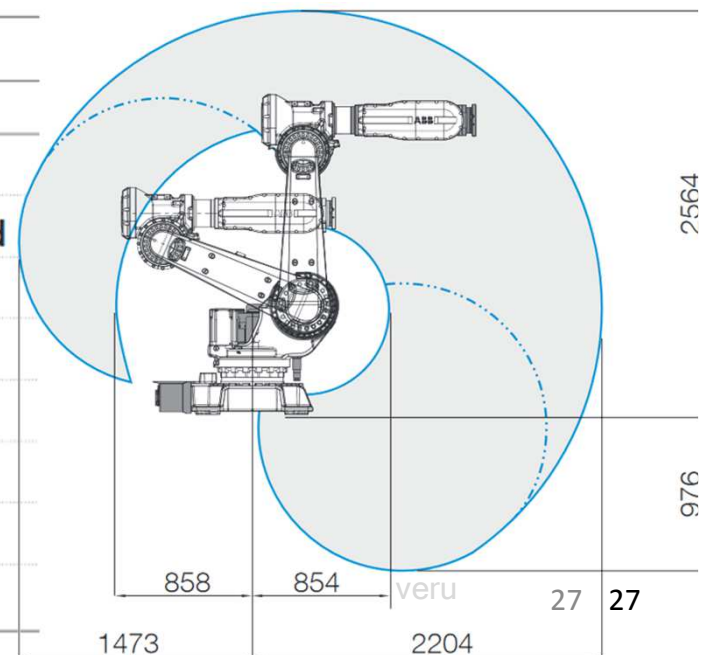
Specification

Reach	2.2 m
Handling capacity	150 kg
Extra loads can be mounted on to the robot:	50 kg on to the upper and 100 kg on to the robot base.
Number of axes:	6
Protection:	IP 54 IP 67 with Foundry Plus 2 option
Mounting:	Floor, tilted or inverted
IRC5 Controller variants	Single cabinet



Performance

Position repeatability:	0.03 mm	
Axis movements	working range	Axis max speed
Axis 1 Rotation	+170° to -170°	100°/s
Axis 2 Arm	+140° to -65°	90°/s
Axis 3 Arm	+70° to -180°	90°/s
Axis 4 Wrist	+300° to -300°	150°/s
Axis 5 Bend	+130° to -130°	120°/s
Axis 6 Turn	+300° to -300°	190°/s



Exemple d'application métier

Des équipements spécifiques selon l'application

Des solutions en catalogue



Robot de peinture



Robot de soudage

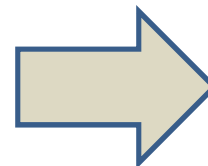
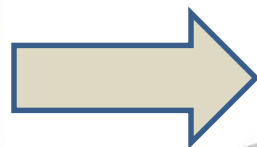
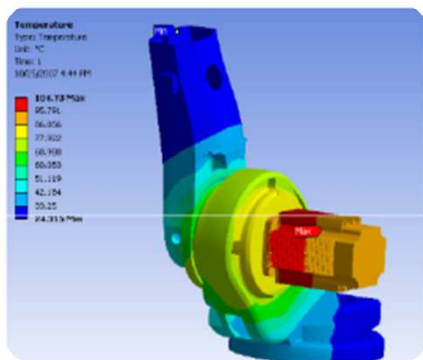


Robot de palettisation



Soudage_UR

De nombreux métiers dans des secteurs très variés



Chez les fabricants de robots

- R&D, production, SAV ...
- Commerciaux, support technique
- Marketing, Management produits

Chez l'intégrateur

- Chargé d'affaire, Chef de projet
- Ingénieur & techniciens en bureau étude
- Mécanique et automatisme
- Programmeur, responsable de chantier

Chez l'utilisateur final

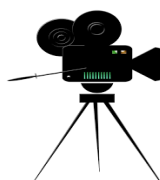
- Chef de projet
- Conducteur de ligne
- Technicien de maintenance

Les robots sont des machines potentiellement dangereuses !!

Risque d'écrasement avec les grands robots mais avec les petits aussi!



TOUJOURS RESPECTER LES CONSIGNES DE SECURITE



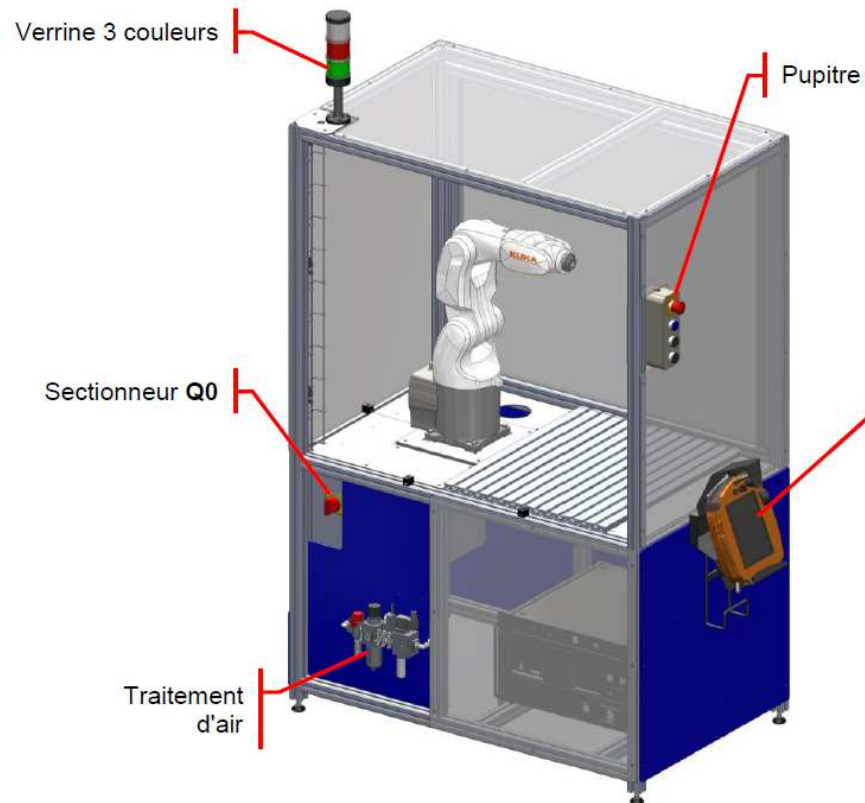
Crash-test



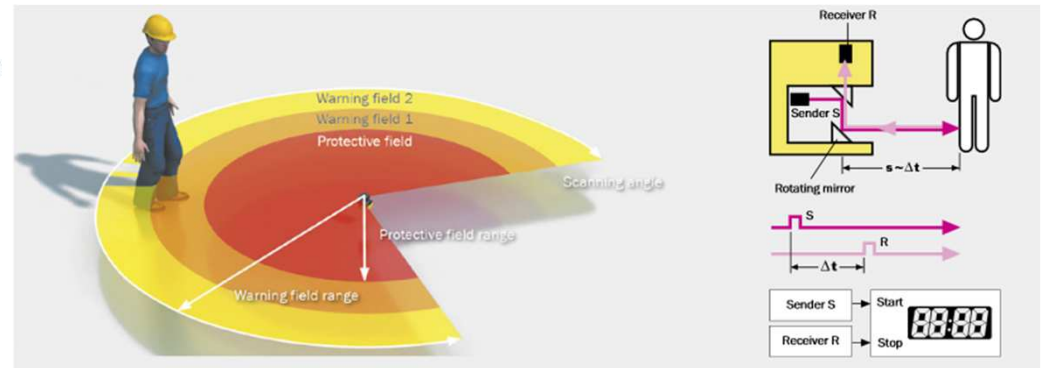
**ATTENTION
A VOS MAINS
RISQUE
D'ECRASEMENT**



BARRIERE MATERIELLE

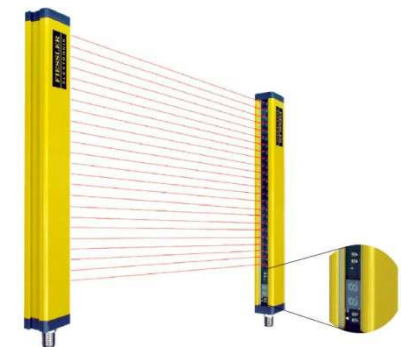


BARRIERE IMMATERIELLE



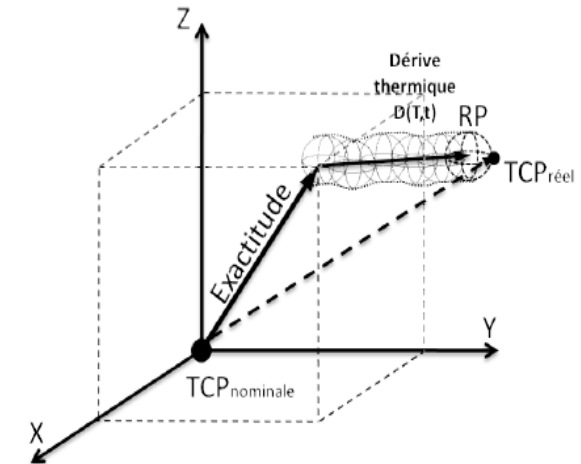
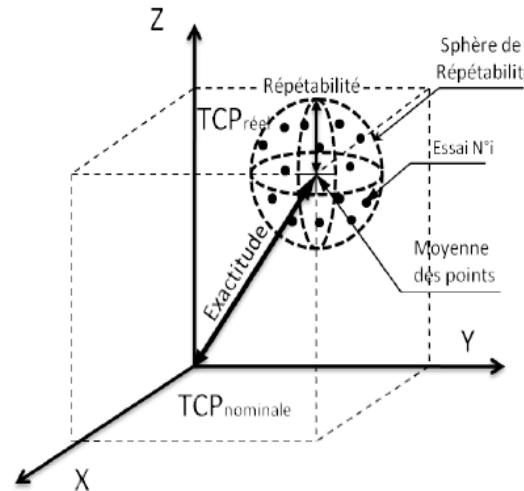
Pupitre de commande et paramétrage du robot (Smart PAD)

Laser de scrutation



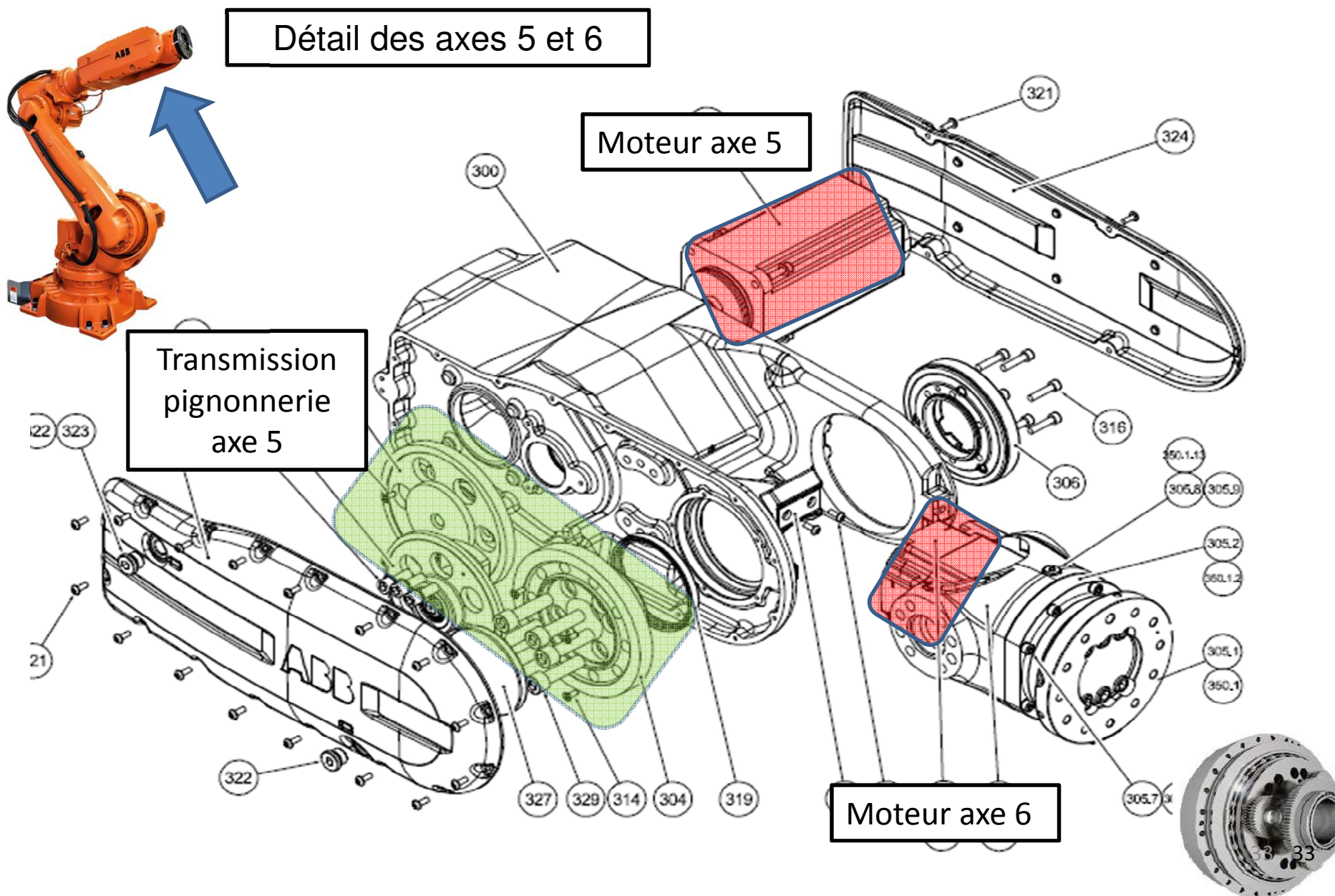
Les différentes sources d'erreur

- Commande
- Calibration
- Jeu dans les liaisons
- Déformation des éléments

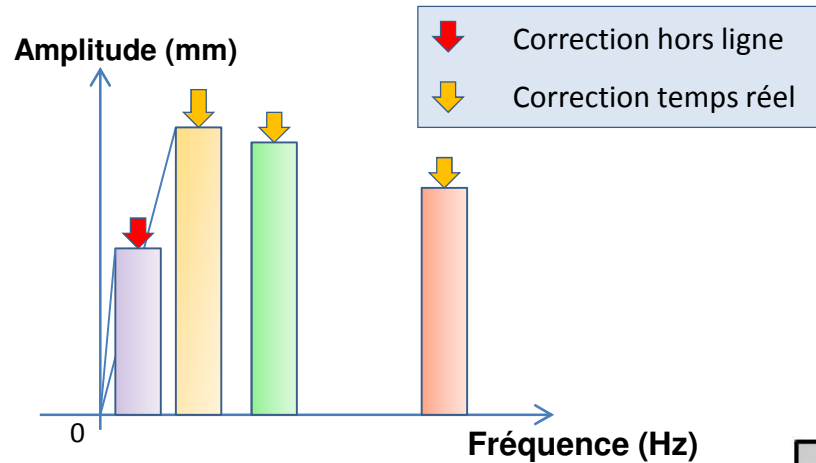


	précis	Non précis
Précision : $\pm 0.8\text{mm}$		
Répétabilité $\pm 0.03\text{mm}$		
	N/A	

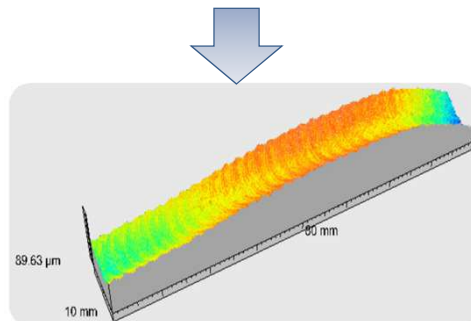
Structure type d'un robot 6 axes



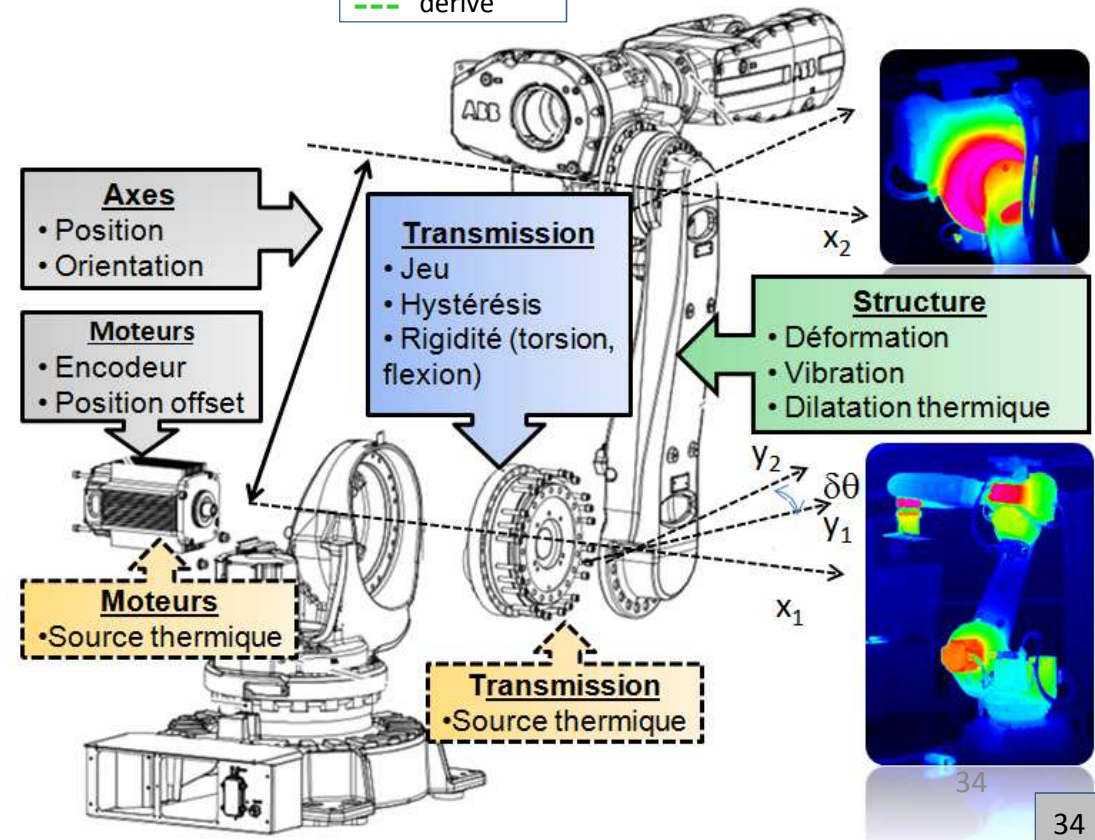
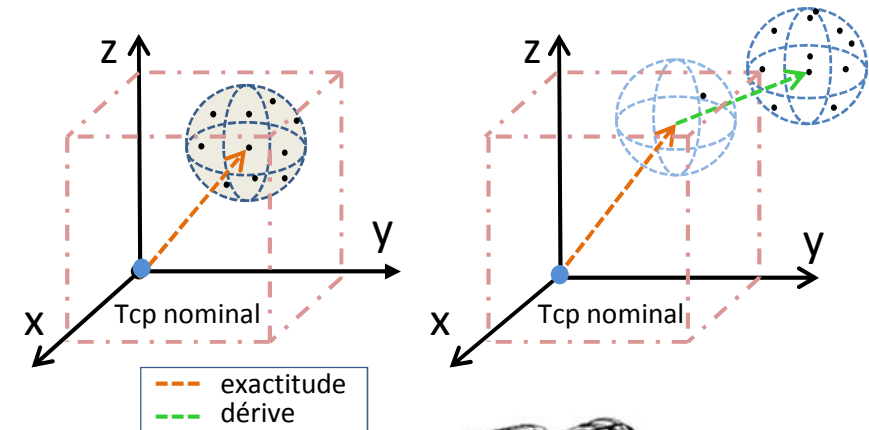
Hiérarchisation des sources d'erreur



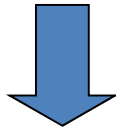
- Erreurs géométriques et de commande
- Comportement thermique
- Déformations élastiques liées au process
- Comportement dynamique



Conséquences sur l'usinage



Deux modes de programmation



Programmation par apprentissage

Les points sont parcourus en manuel et enregistrés au fur et à mesure

Avantage

Rapidité de mise en œuvre

Inconvénient

Complexité limitée des trajets et des formes



Programmation Hors Ligne

Les trajets sont générés à l'aide d'un logiciel externe de FAO

Avantage

Possibilité d'envoyer des fichiers de plusieurs milliers de lignes

Inconvénient

Compatibilité de la chaîne CFAO nécessaire



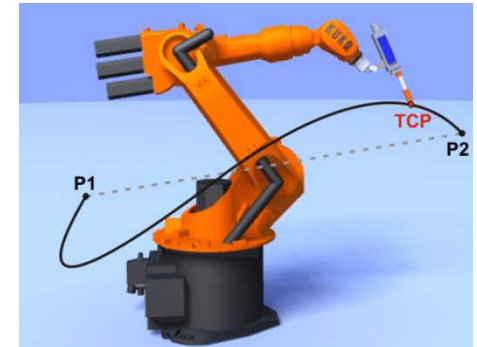
Abb peinture

Trois types de mouvement possibles

PTP (Point To Point)

L'outil se déplace suivant le chemin le plus rapide. Le trajet du robot entre P1 et P2 n'est pas connu à l'avance

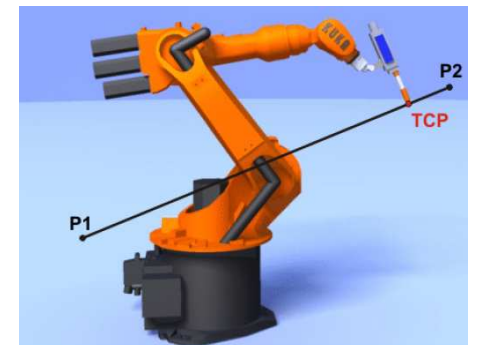
- Risque de collision
- Non maîtrise du trajet
- + Pas de risque de singularité sur le trajet



LIN (Linéaire)

Le trajet suivi par l'outil est une ligne droite entre P1 et P2

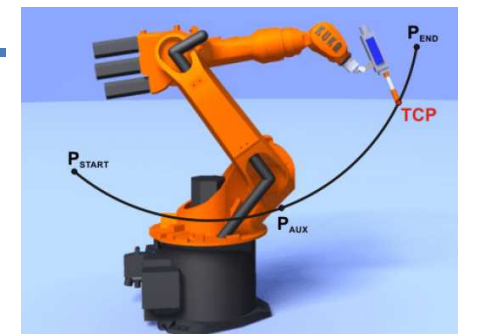
- + Maîtrise des points de passages
- risque de singularité sur le trajet



CIRC (Circulaire)

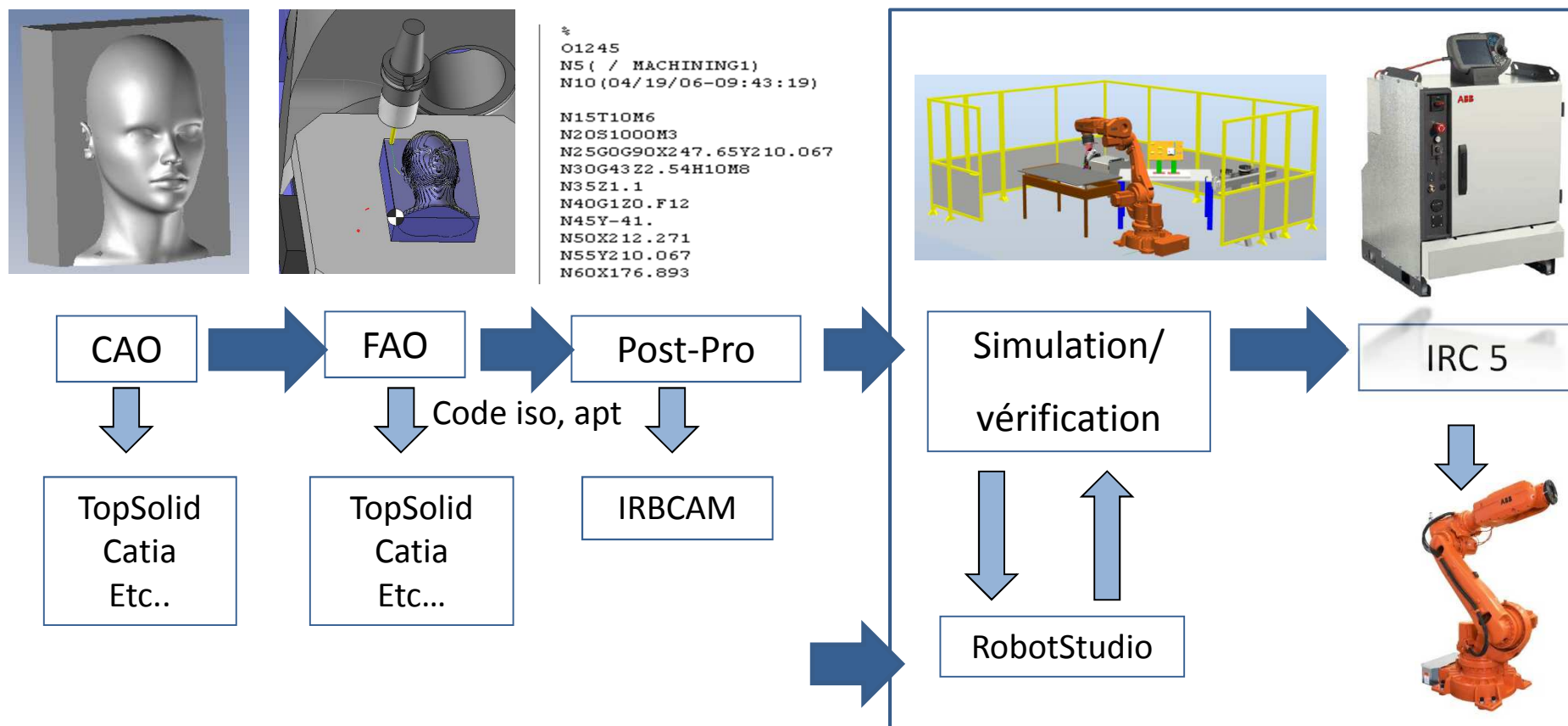
L'outil se déplace suivant un arc de cercle qui s'appuie sur 3 points à définir

- + Maîtrise des points de passages
- + Peu risque de singularité sur le trajet



Chaine numérique pour la programmation des robots

Génération de trajectoires complexes (position + orientation)

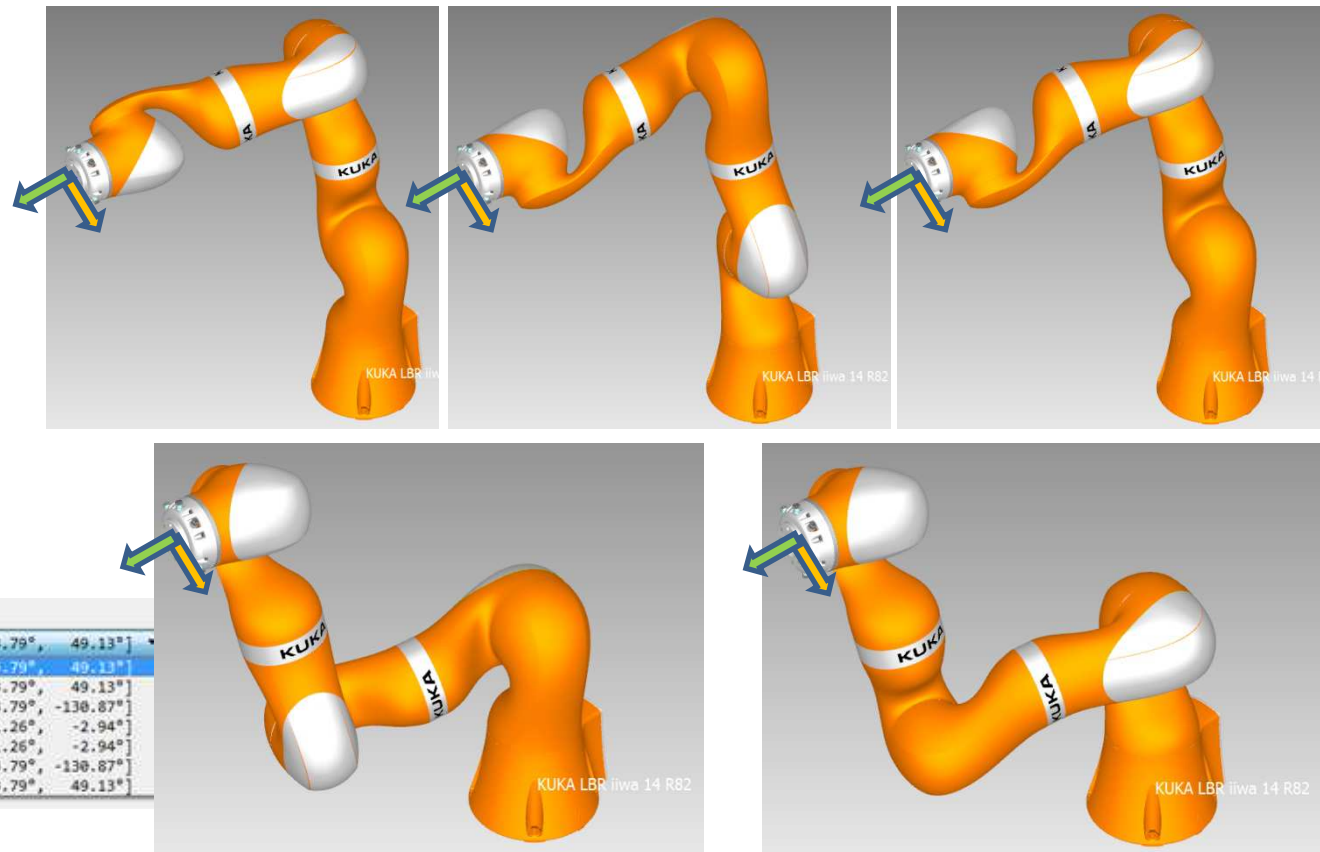


Notion de configuration

Spécificité des robots par rapport aux MOCN :

Il n'y pas forcément unicité de configuration des axes pour positionner le repère outil (point+ 3 orientations) sur une position donnée avec une orientation donnée :

5 configurations pour une même position et orientation de l'outil



Autres configurations ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$)

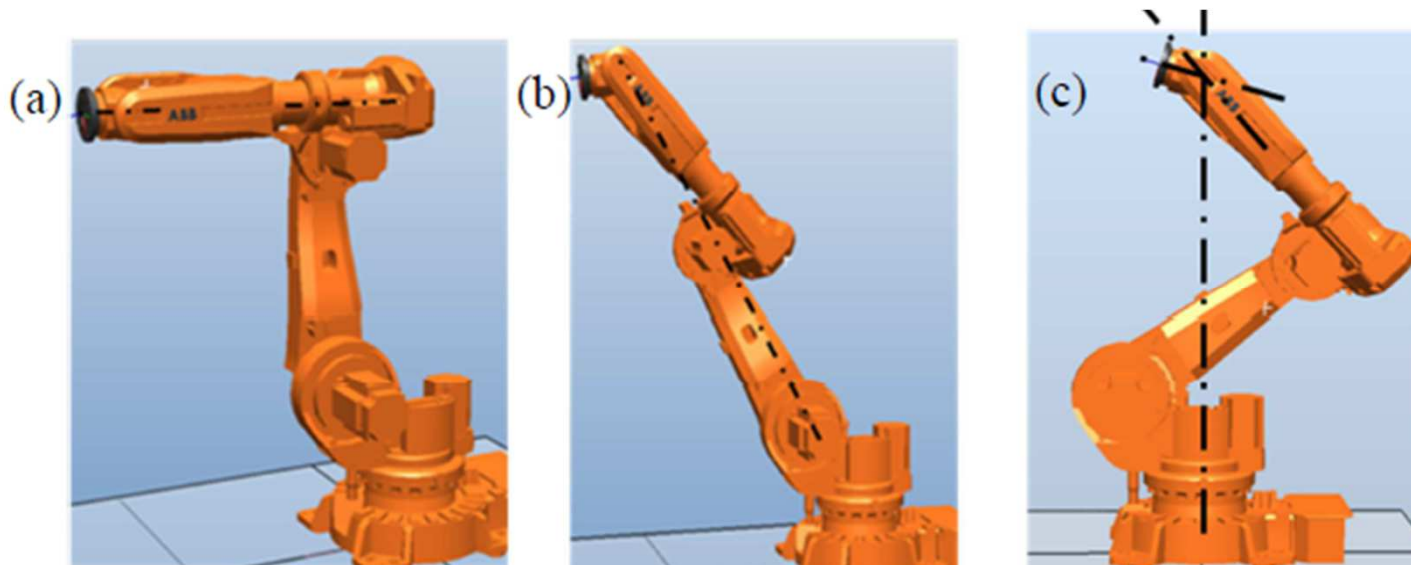
(*)	-18.43°	12.17°	0.00°	-93.13°	-51.63°	-23.79°	49.13°
(*)	-18.43°	12.17°	0.00°	-93.13°	-51.63°	-23.79°	49.13°
(0)	-18.43°	12.17°	0.00°	-93.13°	-51.63°	-23.79°	49.13°
(1)	-18.43°	12.17°	0.00°	-93.13°	128.37°	23.79°	-130.87°
(2)	-18.43°	102.35°	0.00°	93.13°	18.66°	81.26°	-2.94°
(3)	161.57°	-102.35°	0.00°	-93.13°	-161.34°	81.26°	-2.94°
(4)	161.57°	-12.17°	0.00°	93.13°	-51.63°	23.79°	-130.87°
(5)	161.57°	-12.17°	0.00°	93.13°	128.37°	-23.79°	49.13°

Notion de singularité

Pour les manipulateurs anthropomorphes 6 axes comportent 3 types de singularités:

- la singularité de poignet (a)
- la singularité bras tendu lorsque l'on veut atteindre la frontière de l'espace de travail en position (b)
- la singularité d'épaule (c),

→ Perturbation de la vitesse de déplacement (modification des paramètres process)



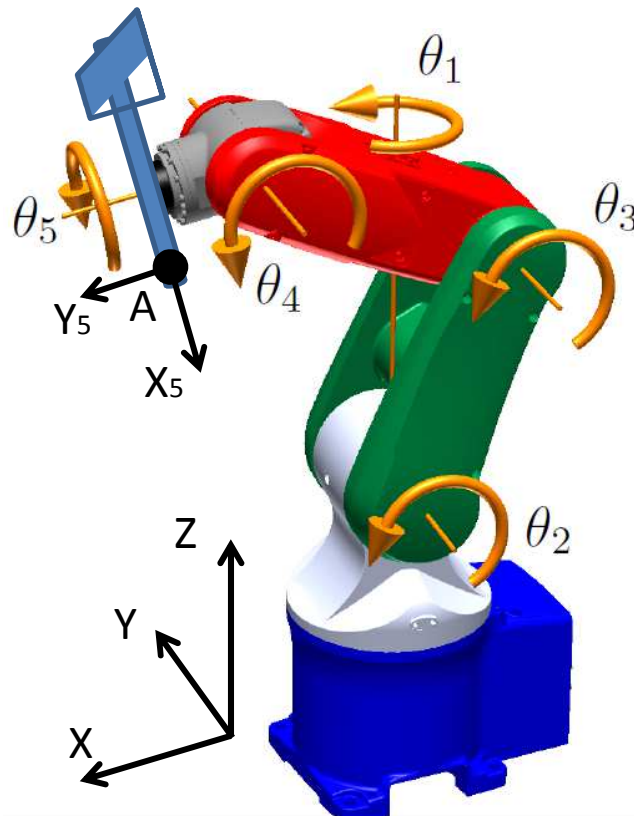
2 Problématiques distinctes : l'une simple, l'autre un peu moins!!

P1 cinématique directe : Connaissant la position angulaire des 5 liaisons, quelles sont la position et l'orientation de l'effecteur dans le repère cartésien?

P2 cinématique inverse : Connaissant la position et l'orientation de l'effecteur dans l'espace cartésien, quelle doit être la consigne angulaire pour les différents moteurs?

Effecteur

- Une géométrie
- Une origine
- Un repère associé



Les différents modèles

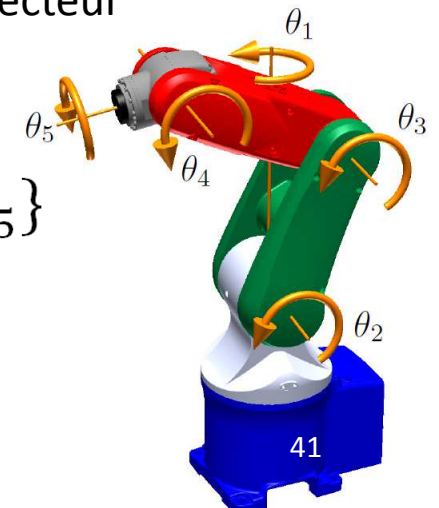
Le modèle géométrique direct (MGD) : Il permet de connaître la position et l'orientation dans l'espace cartésien connaissant les valeurs angulaires des différentes liaisons

$$\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\} \Rightarrow \text{MGD} \Rightarrow \{X_5, Y_5, Z_5, u_5, v_5, w_5\}$$

Avec $\{u_5, v_5, w_5\}$ les orientations angulaires par rapport à x,y,z

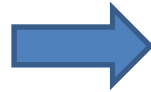
Le modèle géométrique inverse (MGI) : il permet de connaître les valeurs angulaires des différentes liaisons pour atteindre une position et une orientation de l'effecteur

$$\{X_5, Y_5, Z_5, u_5, v_5, w_5\} \Rightarrow \text{MGI} \Rightarrow \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$$



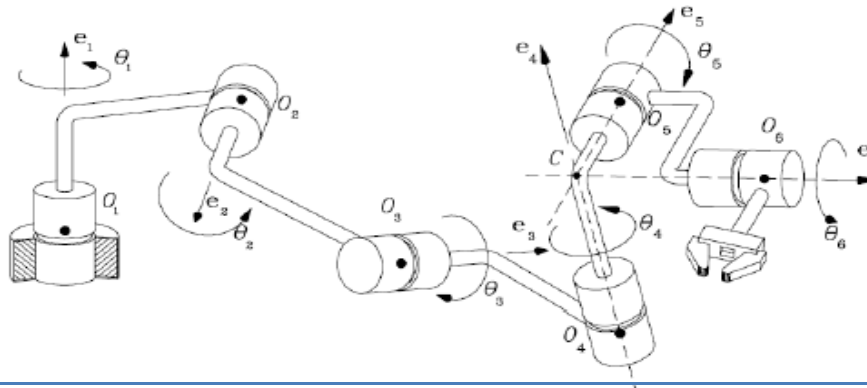
Cinématique directe

Variables articulaires



Localisation du TPC

Solution unique
Résolution immédiate
et « triviale »



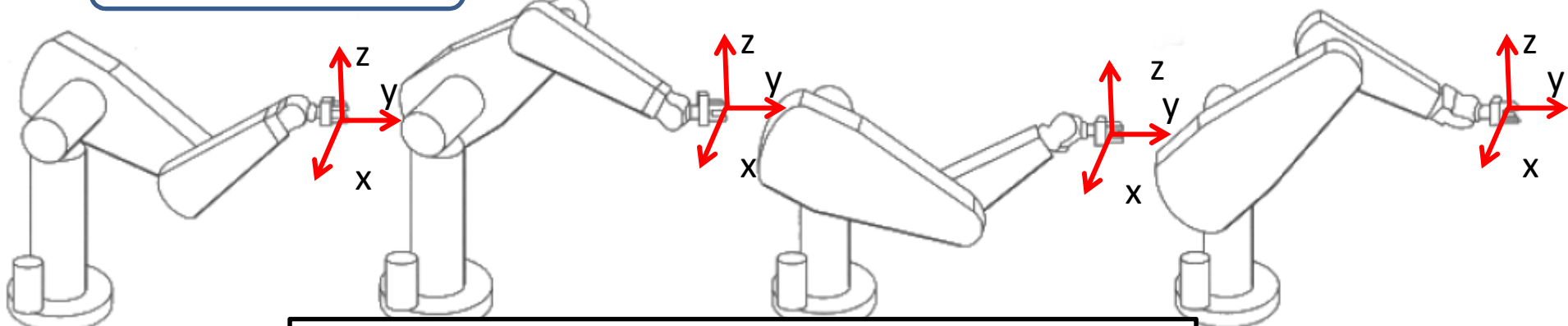
Cinématique inverse

Localisation du TPC



Variables articulaires

Résolution très complexe
Non unicité



Même position du TCP mais configurations différentes

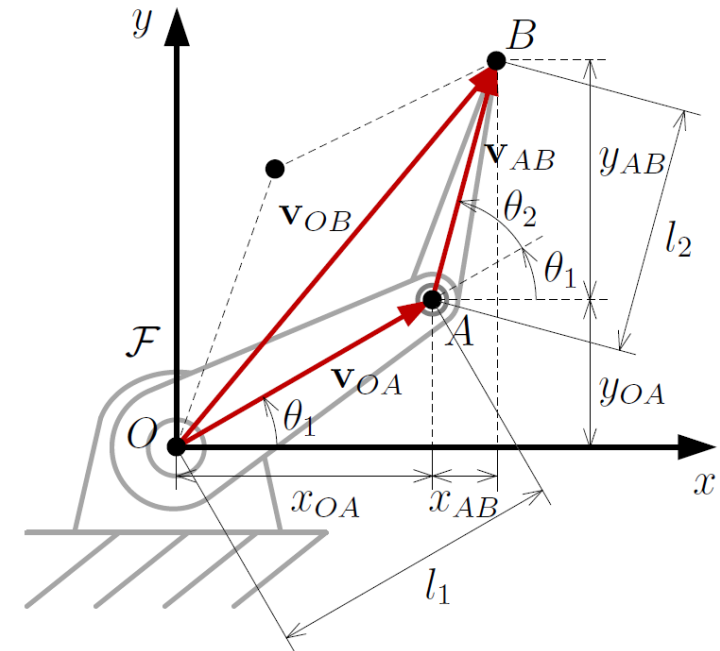
Exemple sur un modèle de système 2 D

Modèle géométrique direct

$$\mathbf{v}_{OA} = \begin{bmatrix} x_{OA} \\ y_{OA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \text{R1}$$

$$\mathbf{v}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad \text{R2}$$

$$\mathbf{v}_{OB} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}, \quad \text{R3}$$



$$\mathbf{v}_{OB} = \mathbf{v}_{OA} + \mathbf{v}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{OA} \\ y_{OA} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{OA} + x_{AB} \\ y_{OA} + y_{AB} \end{bmatrix} \quad \text{R4}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \end{bmatrix} \quad \text{R5}$$

Exemple sur un modèle de système 2 D

Modèle géométrique inverse

On calcule : $\mathbf{v}_{OB}^T \mathbf{v}_{OB} = x_B^2 + y_B^2$

$$x_B^2 + y_B^2 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2))^2 + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2))^2$$

avec $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

On obtient
$$x_B^2 + y_B^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2$$

Comme $2l_1 l_2 > 0$

On obtient
$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x_B^2 + y_B^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right)$$

$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x_B^2 + y_B^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

Les deux solutions sont réelles si l'argument de la fonction arcos est dans l'intervalle $[-1,1]$. Cette condition est équivalente $(2L_1.L_2 > 0)$ à

$$(l_1 - l_2)^2 \leq x_B^2 + y_B^2 \leq (l_1 + l_2)^2$$

A partir de la relation R5 , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) - l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

Ce système de deux équations linéaires en $\cos \theta_1$ et $\sin \theta_1$ admet la solution :

$$\cos \theta_1 = \frac{x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2},$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2}{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2}.$$

avec

$$x_B^2 + y_B^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2$$

d'où

$$\cos \theta_1 = \frac{x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2}{x_B^2 + y_B^2},$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2}{x_B^2 + y_B^2}.$$

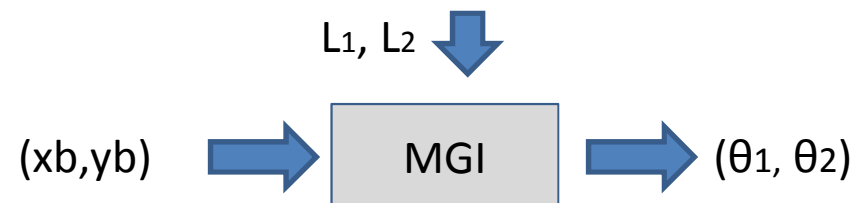
En utilisant la fonction atan2 (y,x) définie par

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \text{sgn}(y) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(y) & \text{si } x = 0 \\ \left(\pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \cdot \text{sgn}(y) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On obtient :

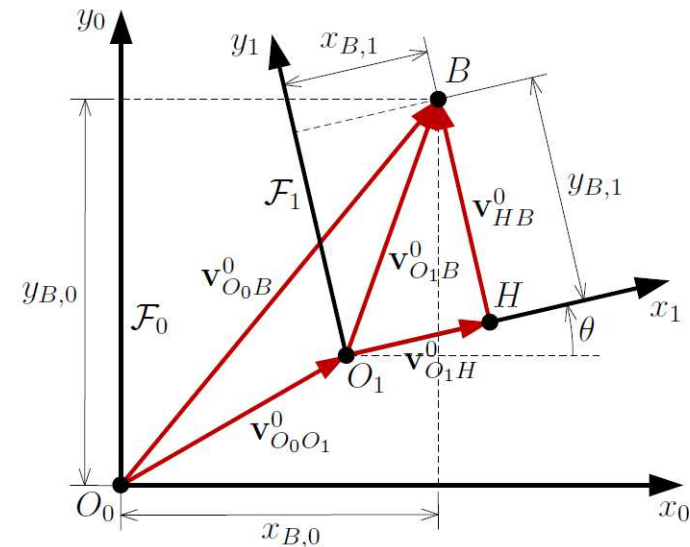
$$\theta_1 = \arctan2(y_B l_1 + y_B l_2 \cos \theta_2 - x_B l_2 \sin \theta_2, x_B l_1 + x_B l_2 \cos \theta_2 + y_B l_2 \sin \theta_2)$$

On a donc identifié le MGI dans le cas plan 2D



Les matrices de rotations en 2D

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{O_0B}^0 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \mathbf{v}_{O_1B}^0 = \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \mathbf{v}_{O_1H}^0 + \mathbf{v}_{HB}^0 \\
 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \begin{bmatrix} x_{B,1} \cos \theta \\ x_{B,1} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{B,1} \cos(\theta + 90^\circ) \\ y_{B,1} \sin(\theta + 90^\circ) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \begin{bmatrix} x_{B,1} \cos \theta \\ x_{B,1} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_{B,1} \sin \theta \\ y_{B,1} \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \begin{bmatrix} x_{B,1} \cos \theta - y_{B,1} \sin \theta \\ x_{B,1} \sin \theta + y_{B,1} \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ y_{B,1} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v}_{O_0O_1}^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{v}_{O_1B}^1,
 \end{aligned}$$



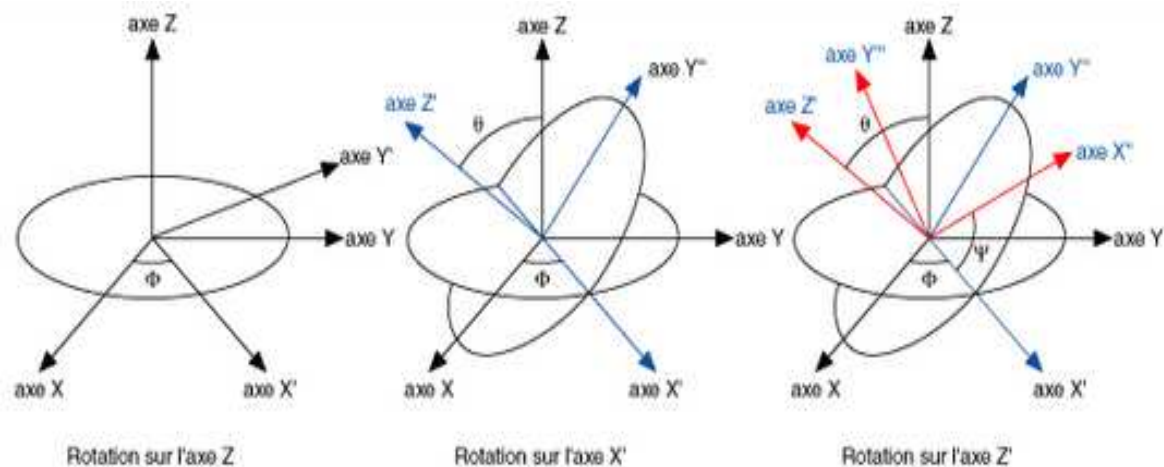
$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Coordonnées de x1 dans Ro

Coordonnées de y1 dans Ro

Généralisation au cas 3D

Définition des angles d'Euler
3 rotations successives



$$R_{12} = \begin{pmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{pmatrix}$$

$$R_{34} = \begin{pmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de rotation,

$$R_{14} = R_{Z1,\phi} R_{X2,\theta} R_{Z3,\psi} = R_{12} R_{23} R_{34}$$

$$R_{14} = \begin{pmatrix} (C_\phi C_\psi - S_\phi C_\theta S_\psi) & (-C_\phi S_\psi - S_\phi C_\theta C_\psi) & (S_\phi S_\theta) \\ (S_\phi C_\psi + C_\phi C_\theta S_\psi) & (-S_\phi S_\psi + C_\phi C_\theta C_\psi) & -C_\phi S_\theta \\ S_\theta S_\psi & S_\theta C_\psi & C_\theta \end{pmatrix}$$

La notion de matrice homogène

Un point P de E3 peut être représenté par ses coordonnées dites homogènes sous la forme d'un vecteur (x,y,z,t) . Si $t=1$, les coordonnées après déplacement sont liées aux coordonnées avant déplacement par la relation :

$$\begin{array}{c} \text{Coordonnées après} \\ \text{déplacement} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{c} \text{Coordonnées avant} \\ \text{déplacement} \end{array}$$

Matrice homogène 4X4 qui caractérise le déplacement

Relation de composition des déplacements

$$T_{02} = T_{01} T_{12}$$

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{01} & d_{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{12} & d_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{01} R_{12} & R_{01} d_{12} + d_{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation du modèle géométrique direct : Méthode de Denavit-Hartenberg

Objectif : définir un référentiel sur chaque lien avec une méthode systématique qui simplifie l'expression des matrices de rotation.



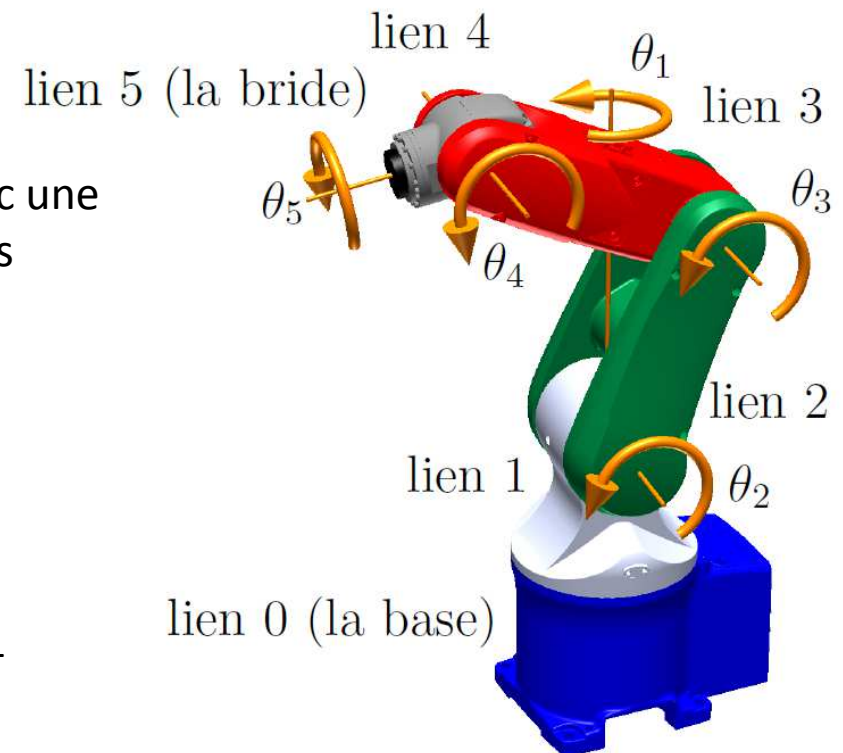
Idée :

Paramétrage avec deux contraintes :

→ L'axe Z_i est aligné avec l'axe de la liaison pivot $i+1$

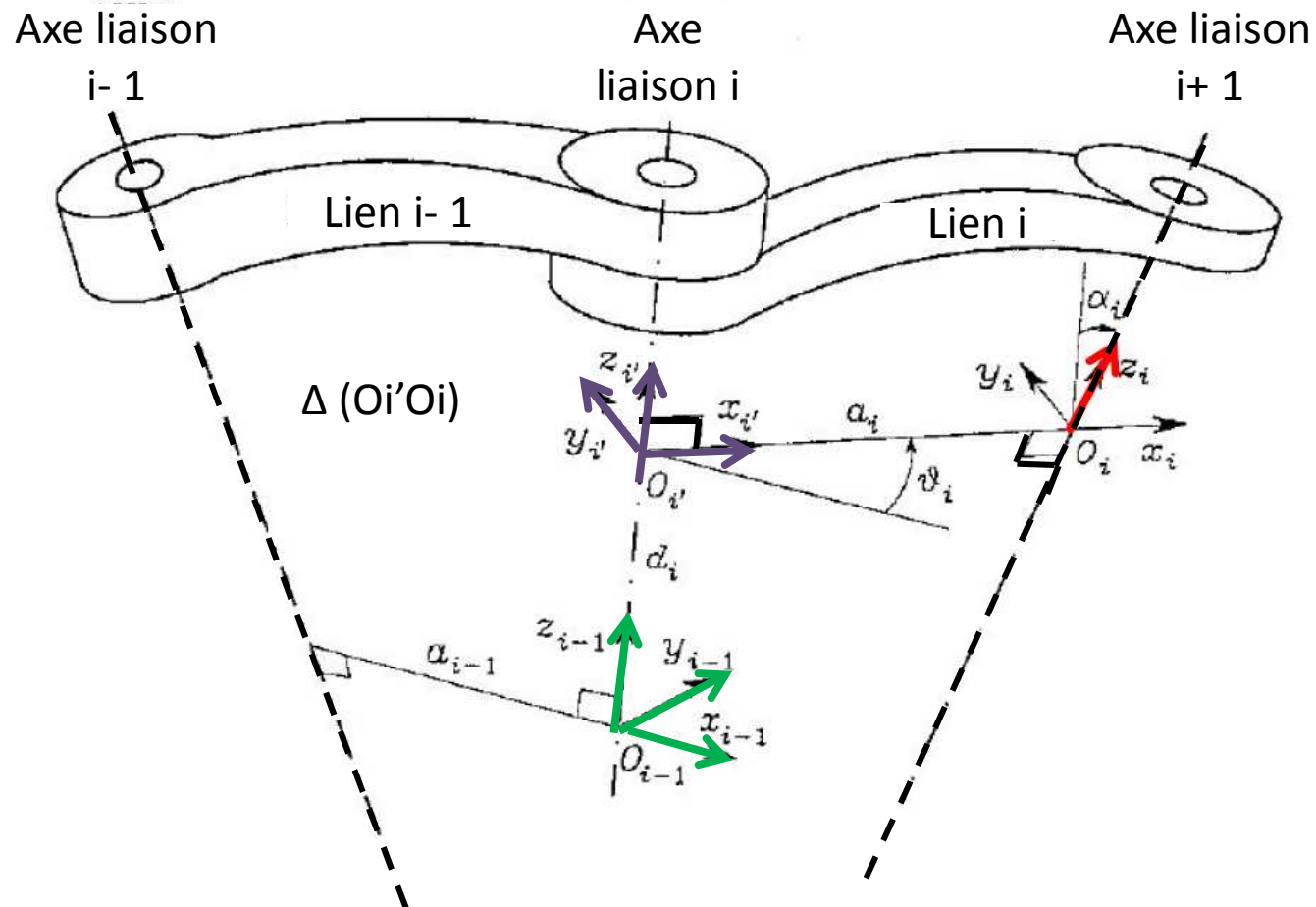
→ L'axe x_i coupe l'axe Z_{i-1} à angle droit

Seuls 4 paramètres (deux distances et deux angles) sont nécessaires (au lieu de 6) pour définir la position du repère R_i par rapport à R_{i-1}



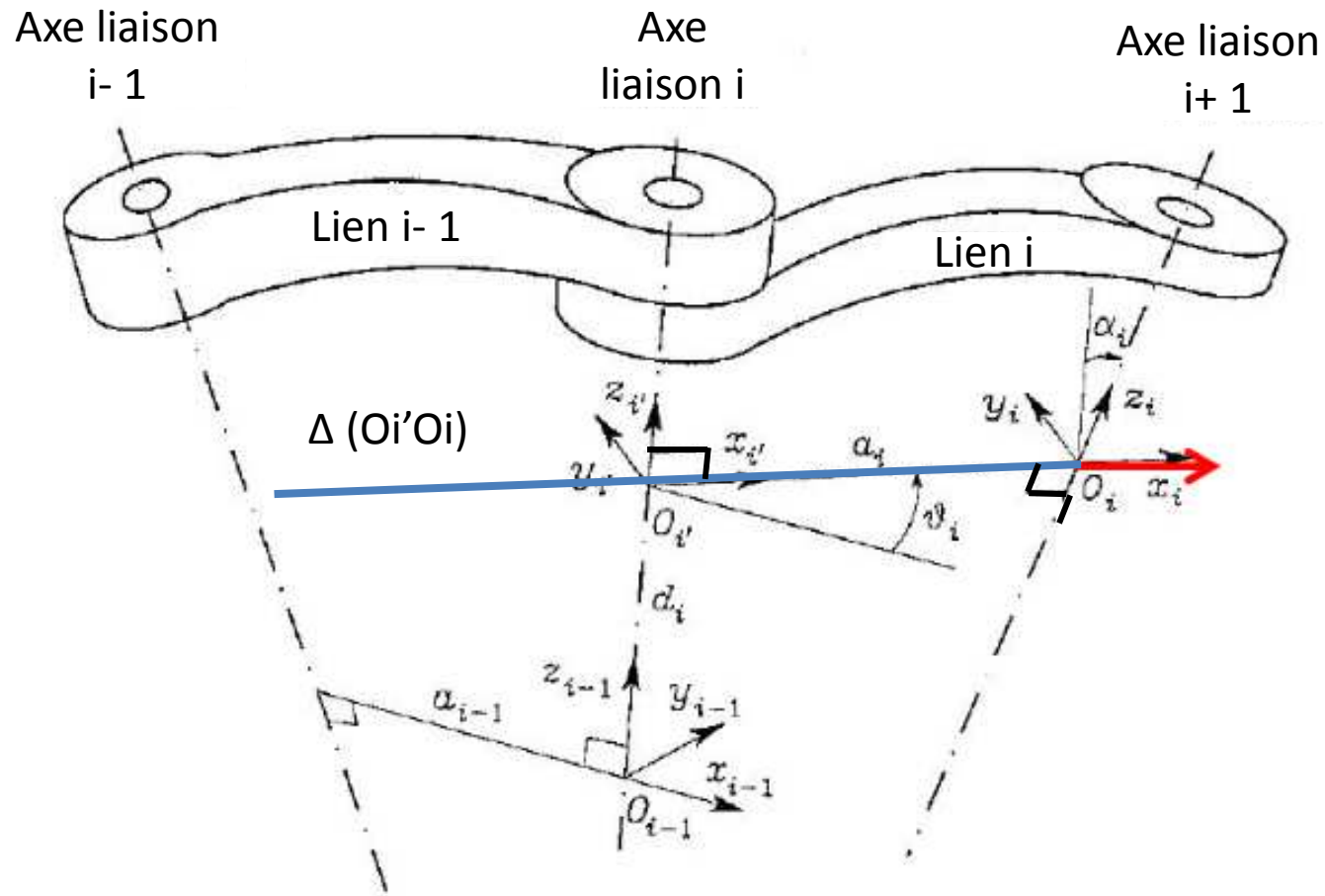
Paramétrage selon la convention Denavit-Hartenberg

L'axe Z_i est aligné avec l'axe de la liaison $i+1$

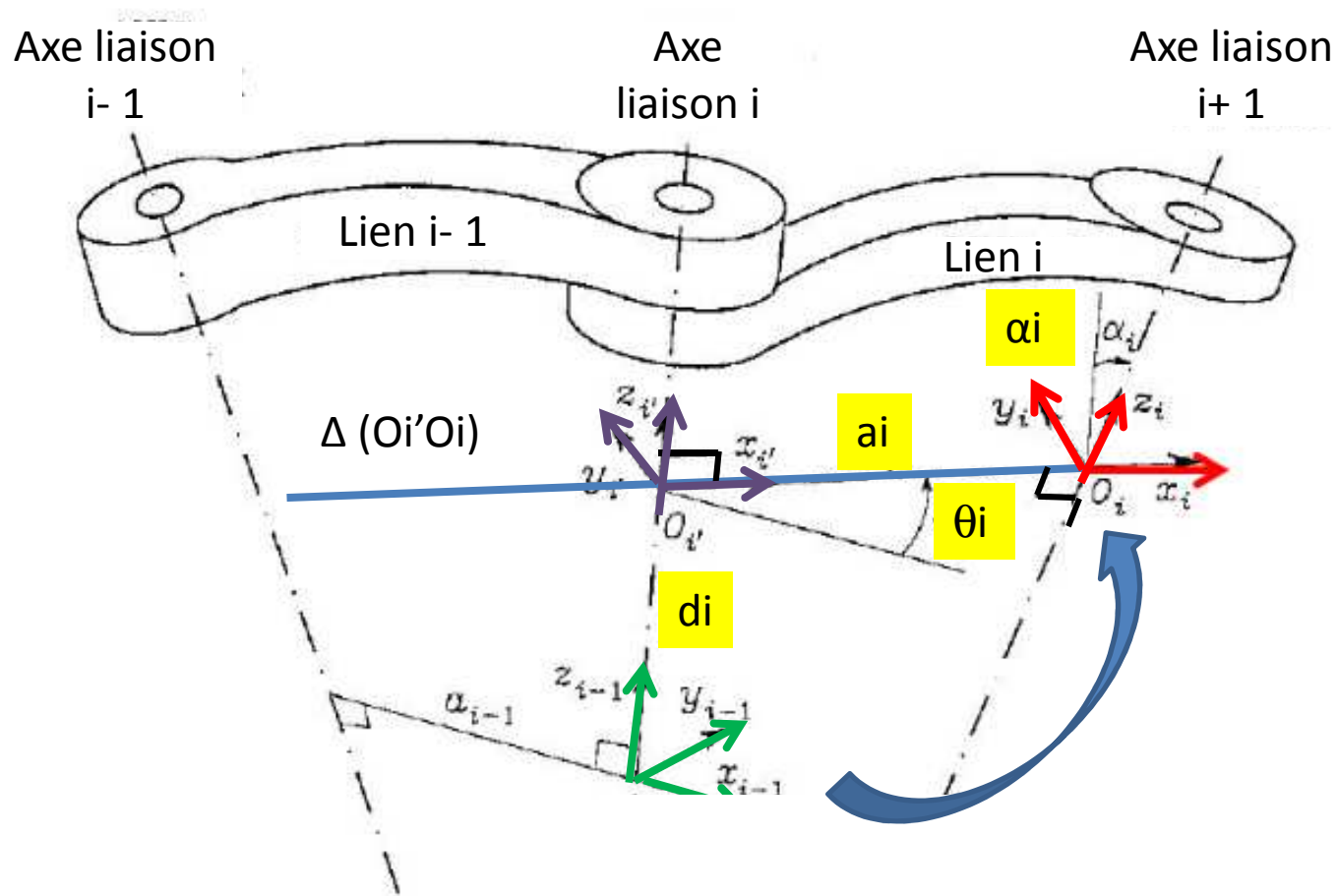


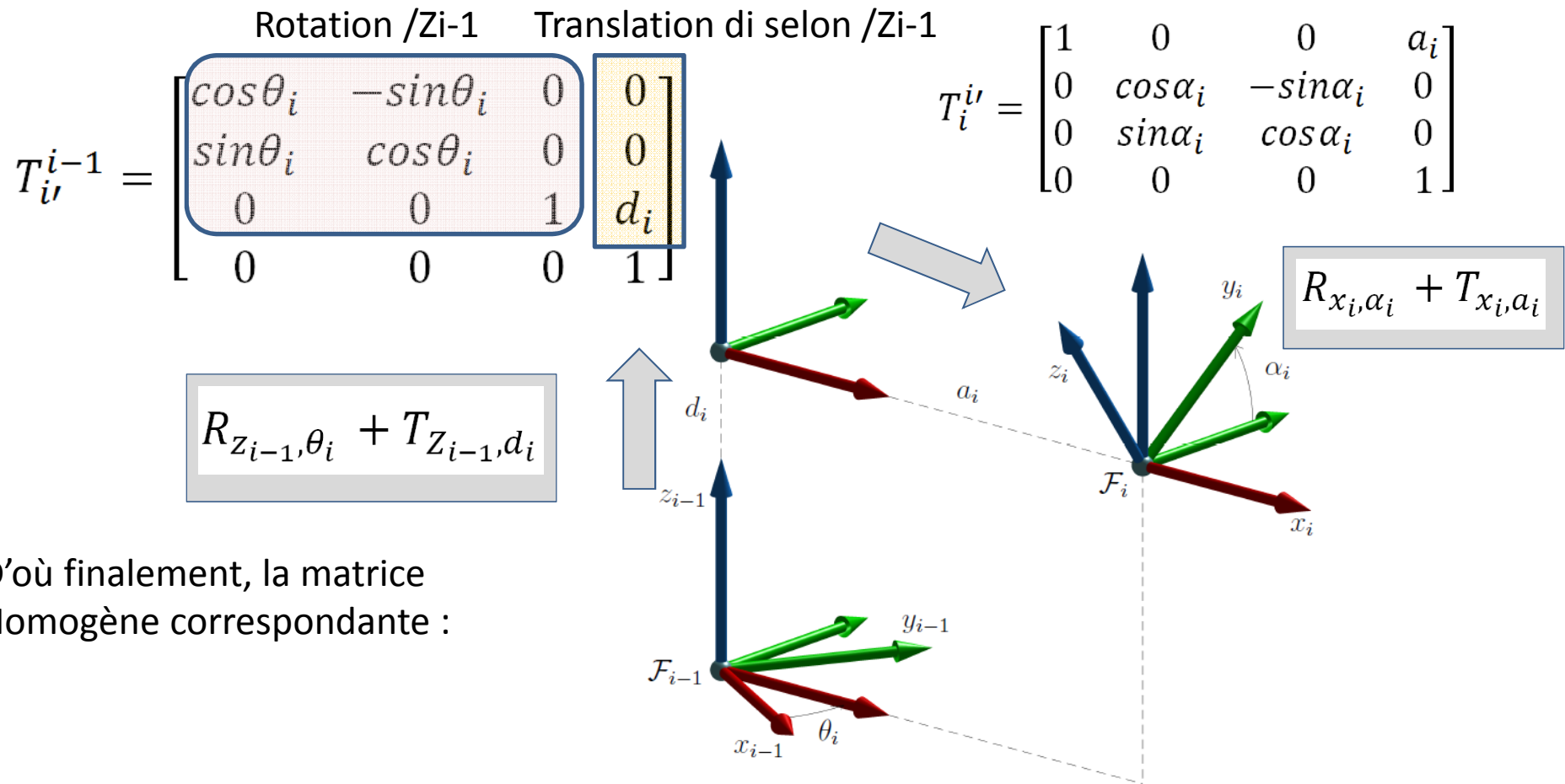
Paramétrage selon la convention Denavit-Hartenberg

L'axe x_i est perpendiculaire à l'axe z_{i-1} et passe par O_i
Avec $\Delta (O_i' O_i)$ perpendiculaire commune à (Z_{i-1}) et (Z_i)



Paramétrage selon la convention Denavit-Hartenberg





D'où finalement, la matrice
Homogène correspondante :

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice homogène de rotation

- Rotation suivant x

$$H_{rot,x}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

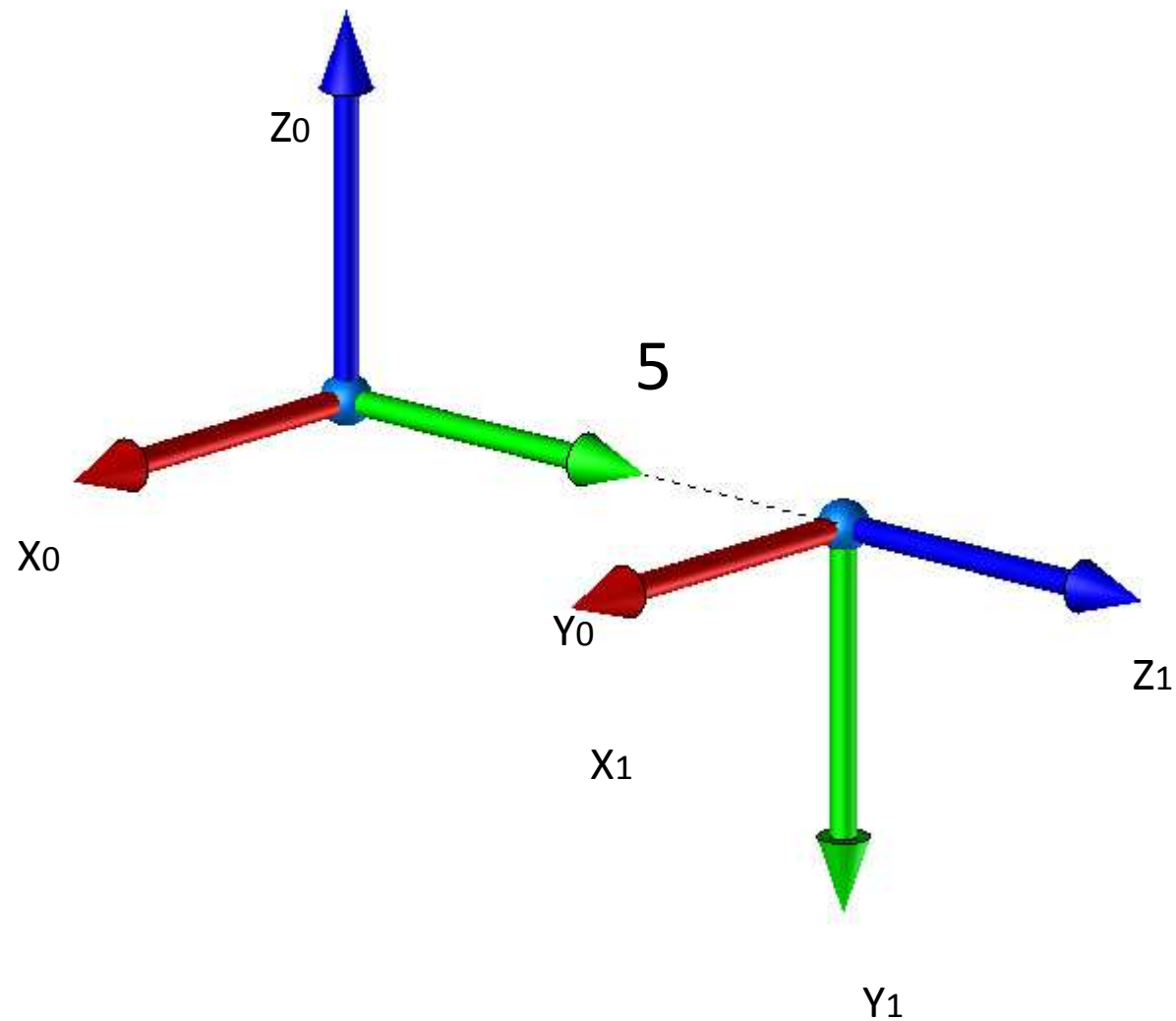
- Rotation suivant y

$$H_{rot,y}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation suivant z

$$H_{rot,z}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

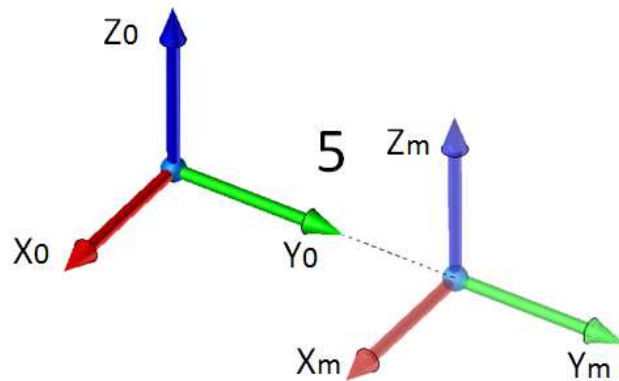
Exemple 1



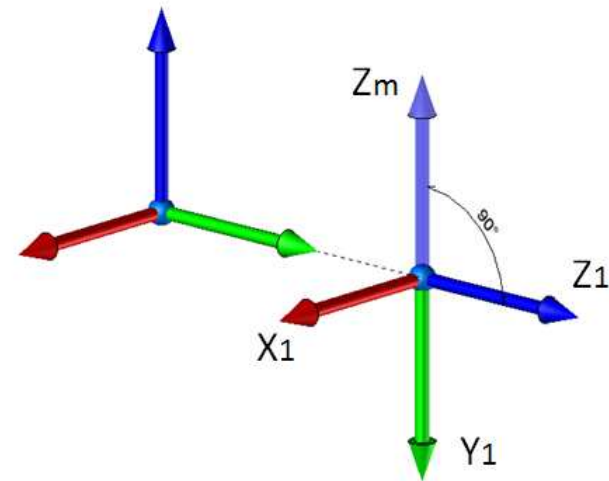
Exemple 1

– Cas 1

$$H_1^0 = H_{trans}(0,5,0)H_{rot,x}(-90^\circ)$$



$$H_{trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$H_{rot,x}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1

– Cas 1

$$H_1^0 = H_{trans}(0,5,0)H_{rot,x}(-90^\circ)$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

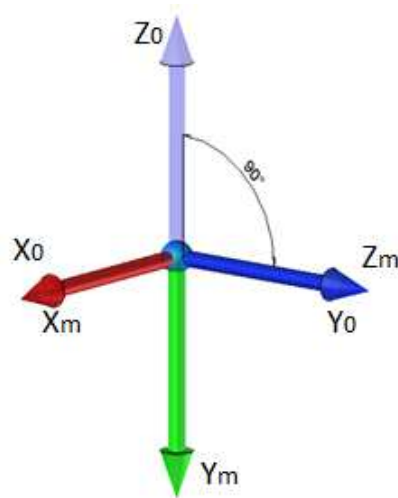
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

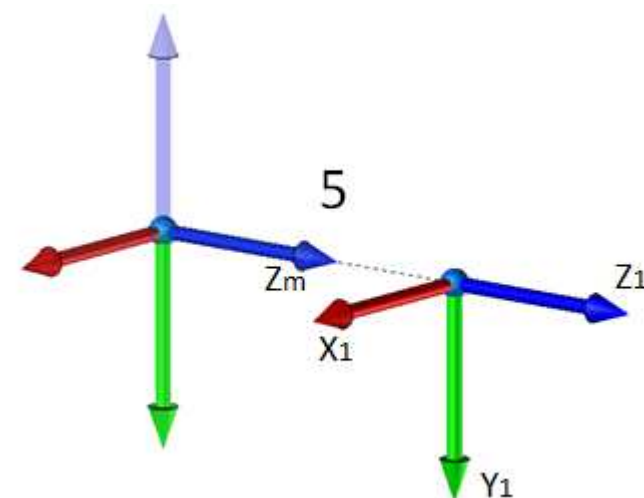
Exemple 1

– Cas 2

$$H_1^0 = H_{rot,x}(-90^\circ)H_{trans}(0,0,5)$$



$$H_{rot,x}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$H_{trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 1

– Cas 1

$$H_1^0 = H_{rot,x}(-90^\circ) H_{trans}(0,0,5)$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

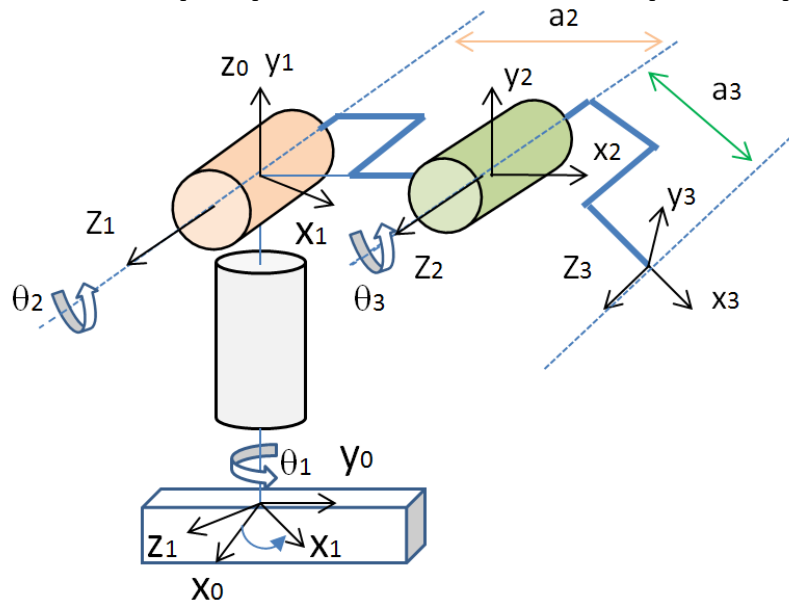
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple pour un bras anthropomorphe à 3 liaisons



$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Liaison	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$T_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & a_i \sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour } i=2,3$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & -C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$