Département de mines 2019/2020

1ière Année licance

La série n°4

- Maths 2 -

Exo1: Soit M la matrice d'une application linéaire f donnée comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $B' = (2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}, 2\vec{e_1} - 2\vec{e_2}, 2\vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, et $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- déterminer la matrice de passage de B vers B'.

En déduire la matrice de l'app f associée à B'.

Ex2: Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode de Cramer, puis la méthode de Gauss.

$$(S) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

Exo3 Résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = 5 \end{cases}$$

$\boxed{P_1}$

Solution de la série n°: 4

Exo 1: le matrice de passage P de la base B vers la base B' est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on revient au schéma:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3$$

$$(e'_i) \xrightarrow{P} (e_i) \xrightarrow{M} (e_i) \xrightarrow{P^{-1}} (e'_i)$$

le matrice de l'application associée à le B' est donnée par:

$A = P^{-1} . M . P$

on doit calculer P^{-1} à l'aide de la méthode des cofacteurs

$P^{-1} = \dfrac{C^t}{\det P}$. $\det P = -16 \neq 0$.

$$P^{-1} = -1/16 \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = 1/4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exo 2: 1) méthode de Cramer

$$(S) : \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \qquad AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} ; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

tout d'abord on doit calculer $\det A$.

méthode simple pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3x3.

$\boxed{P_2}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$a_{31}a_{22}a_{13}$ $\quad a_{32}a_{23}a_{12}$ $\quad a_{33}a_{22}a_{13}$

$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad a_{12}a_{23}a_{32}$ $\quad a_{13}a_{22}a_{33}$

$$\det M = (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}\cdot a_{23}a_{12} + a_{33}a_{22}a_{13}) - (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{33})$$

On applique cela à la matrice A. ⇒

$\det A = 26 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. le système admet une solution unique

d'après la méthode de Cramer

$$x = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26}$$

après calcul on trouve $x = 1$; $y = -3$; $z = -2$

2) avec la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2-\frac{3}{2}\cdot 1 & 2-\frac{3}{2}(-3) & 5-\frac{3}{2}\cdot 5 \\ 0 & -3-\frac{5}{2}\cdot 1 & -1-\frac{5}{2}(-3) & 16-\frac{5}{2}\cdot 5 \end{array}\right)$$

la méthode des pivots : $P_1 = \frac{3}{2}$, $P_2 = \frac{5}{2}$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \qquad P_3 = \frac{-\frac{11}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{11}{7}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-13.2}{7} & \frac{52}{7} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13.2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{52}{7} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0.x + 0.y - \frac{13.2}{7}.z = \frac{52}{7} \Rightarrow z = -2$

$0.x + \frac{-7}{2}.y + \frac{13}{2}.(-2) = -5/2 \Rightarrow -7y - 26 = -5 \Rightarrow y = -3$

$2x + y - 3z = 5 \Rightarrow 2x - 3 - 3(-2) = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est la solution du système linéaire

Exo3
$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \quad \dots ① \\ x + 2y - z + 4t = 2 \quad \dots ② \\ x + 7y - 4z + 11t = 5 \quad \dots ③ \end{cases}$$

$③ - ② \Rightarrow \begin{cases} 5y - 3z + 7t = 3 \quad \dots ③' \\ 2x - y + z + t = 1 \quad \dots ① \end{cases}$ de l'équation ① $\Rightarrow$

$y = 2x + z + t - 1 \Rightarrow 5(2x + z + t - 1) - 3z + 7t = 3$

$\Rightarrow 10x = 8 - 2z - 12t \Rightarrow 5x = 4 - z - 6t \Rightarrow x = \frac{1}{5}(4 - z - 6t)$

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}(4 - z - 6t) + z + t - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}(3 + z - 7t)$

donc $S = \left\{ \frac{1}{5}(4 - z - 6t), \frac{(3 + z - 7t)}{5}, z, t \right\}$
$\forall z, t \in \mathbb{R}$

S est l'ensemble de solution du système d'équation.