Département de mines
1ière Année licence
Semestre 2
module : Maths 2

Année 2019/2020

Série n°6
Les équations différentielles ordinaires
E.D.O

Exo1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+3}{x-y-1}$

Exo2 : 1/ Résoudre l'équation de Bernoulli donnée comme suit :

$\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

2/ Soit l'équation : $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0 \ldots (*)$

- Montrer que $(*)$ est une différentielle totale, puis l'intégrer.

3/ Résoudre l'équation suivante :

$(y+xy^2)dx-x\,dy=0$, en introduisant la notion du facteur intégrant.

Exo3 : 1/ Résoudre l'équation $y'=\sin kx$ et la solution particulière qui satisfait $y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=1$

2/ Intégrer les deux équations suivantes : $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$; $a=\text{cste}$

et $3\dfrac{d^2y}{dx^2}=y^{-7/3}$.

3/ Resoudre l'équation d'euler suivante : $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=0$.

Exo4 : a) Résoudre les équations homogènes suivantes :

1/ $y''+y'-2y=0$ 2/ $y''+y=0$ 3/ $y''-y=0$ 4/ $y''+2y'+5y=0$

5/ $y'''+2y''+y'=0$

b) Soit l'équation $y''+9y=0$. trouver l'intégrale générale puis une solution particulière satisfaisant aux conditions initiales : $y|_{x=0}=0$; $y'|_{x=0}=3$

c) Trouver la solution générale des équations suivantes :

1/ $y''+y'=4x^2e^x$; 2/ $y''+4y=\sin 2x$; 3/ $y'''-y''=12x^2+6x$.

Le corrigé de la série n°6

P1

Ex 01 : 1/ $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0$ (1) pour le résoudre on doit séparer les variables : (1) devient $\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0$ en intégrant :

$\log|x| + x + \log|y| - y = C$ ou $\log|xy| + x - y = C$, $C = \text{cste}$.

2/ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$ on a le second membre une fonction homogène de degré zéro ; donc l'équation est homogène. on prend $y = x.u$

par substitution dans l'équation homogène on aura :

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$ séparons les variables on a :

$\frac{(1-u^2)}{u^3}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-1}{2u^2} - \log|u| = \log|x| + \log|c|$

$\Rightarrow \frac{-1}{2u^2} = \log|u\,x\,c|$ et comme $y = ux \Rightarrow$ l'intégrale générale de l'équation initiale : $\frac{-x^2}{2y^2} = \log|cy|$ ici on ne peut pas exprimer y en fct de x mais facilement x en fonction de y :

$x = y\sqrt{-2\log|cy|}$.

3/ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$ pour ramener cette équation à une équation homogène on pose $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$ alors

$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}$; Résolvant le système de deux équations $h+k-3 = 0$ et $h-k-1 = 0$; $h = 2$ et $k = 1$ on obtient ainsi l'équation homogène $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$ qu'on va résoudre en faisant la substitution $\frac{y_1}{x_1} = u$ on a : $y_1 = ux_1$; $\frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1\frac{du}{dx_1} \Rightarrow u + x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}$

et on obtient une équation à variables séparables.

$x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$ séparons les variables : $\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx_1}{x_1}$ on trouve

on intégrant : $\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\log(1+u^2) = \log|x_1| + \log|C|$;

$\operatorname{arctg} u = \log\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right| \Rightarrow Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}$

substituant dans cette dernière égalité $\frac{y_1}{x_1}$ au lieu de u, $\boxed{P_2}$

on obtient $C\sqrt{x_1^2+y_1^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}$

enfin passant aux variables x, y on obtient en définitive :

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$$

Exo2 : i) Résoudre l'équation $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$ on divise par $y^3\left(\frac{dy}{dx}=y'\right)$

on obtient $y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$ on pose $Z = y^{-2} \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

on substitue dans l'équation on aura :

$\frac{dZ}{dx} - 2xZ = -2x^3$ c'est une équation différentielle du 1ier ordre non homogène. Trouver son intégrale générale

$\frac{dZ}{dx} - 2xZ = -2x^3$ tout d'abord on résoud l'équation homogène après on va chercher la solution particulière par la méthode de la variation des ctes ici une seule cte.

$$Z' - 2xZ = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dx} - 2xZ = 0 \Rightarrow \int\frac{dZ}{Z} = \int 2x\,dx$$

$\Rightarrow \log|Z| = x^2 + C \Rightarrow Z_h = C_1e^{x^2}$ Par la méthode V.C $\Rightarrow$ $Z = e^{x^2}$

$C_1' \cdot Z = -2x^3 \Rightarrow C_1' = -2x^3e^{-x^2} \Rightarrow C_1 = \int -2x^3e^{-x^2}dx$ (intégration par partie) $\Rightarrow C_1 = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$

$\Rightarrow Z_p = C_1 \cdot Z = (x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C)\,e^{x^2} \Rightarrow Z_p = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$

revenons à la variable $y \Rightarrow Z = y^{-2} \Rightarrow y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}$ C'est la solution de l'équation de Bernoulli.

ii) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$ est une différentielle totale il faut que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ on a $M(x,y) = \frac{2x}{y^3}$; $N(x,y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$

donc $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6x}{y^4}$. Pour $y \neq 0$

Le premier membre de l'équation donnée est donc la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x,y)$.

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$. $\boxed{P_3}$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y qu'il faut déterminer. Dérivons cette relation par rapport à y et prenons en considération que $\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$

on trouve $-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2-3x^2}{y^4} \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c_1$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c_1$. Par conséquent l'intégrale générale de l'équation proposé est $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$

3/ $(y+xy^2)dx - xdy = 0$ ici $M = y+xy^2$ et $N = -x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2xy$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$ on voit que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ donc ce n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant μ qui vérifie

$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$? ici $\mu = \mu(y)$ $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}$

$= \frac{-2}{y}$. $\frac{d\log\mu}{dy} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \log\mu = -2\log y \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$.

on multiplie l'équation initiale par $\mu = \frac{1}{y^2}$ on obtient

$\underbrace{\left(\frac{1}{y}+x\right)}_{M'}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{N'}dy = 0$ ici $\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$.

Résolvant cette équation on trouve son intégrale générale :

$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$ (faut juste suivre les mêmes étapes que 2°)

exo 3

1/ résoudre l'équation $y'' = \sin kx$ on intègre

$\Rightarrow y' = \int_0^x \sin kx\,dx + c_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + c_1$ et on intègre une 2ème

fois $y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k}\right)dx + \int_0^x c_1 dx + C_2 \Rightarrow y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + c_1 x + C_2$

Chercher la solution particulière càd déterminer la valeur de c_1 et C_2

en utilisant les conditions initiales $y|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y'|_{x=0} = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow y_p = -\frac{\sin kx}{k^2} + x\left(\frac{1}{k}+1\right)$.

3) Résoudre l'équation d'euler :

dans le cas générale elle prend la forme suivante :

$a_n x^n y^{(n)} + x a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x)$ dans notre cas

on a une équation d'euler du 2nd ordre homogène càd $f(x)=0$.

la résolution de l'équation d'euler consiste à introduire dans l'équation initiale $y = x^K$ et puis déterminer K.

$y = x^K \Rightarrow y' = K x^{K-1}$ $\quad y'' = K(K-1)x^{K-2}$ donc l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 0 \\ (\Leftrightarrow) \\ x^2y'' + xy' - y = 0 \end{array}\right\}$$ devient $K(K-1)x^2 \cdot x^{K-2} + xKx^{K-1} - x^K = 0$

$\Rightarrow [K(K-1) + K - 1]x^K = 0$ comme $x^K \neq 0$

on aura $K^2 - K + K - 1 = 0 \Rightarrow K^2 - 1 = 0 \Rightarrow (K-1)(K+1) = 0$

les racines sont $K_1 = 1$ $K_2 = -1$.

la solution générale de l'équation d'euler est :

$y_g = c_1 x^1 + c_2 x^{-1} = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}$. ($y_1 = x$ et $y_2 = \frac{1}{x}$ sont aussi des solutions de l'équation linéairement indépendantes)

Résoudre les équations à coefficients cts :

Exo4 : a) Résoudre

1/ $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad y = e^{Kx} \Rightarrow$ l'équation caractéristique est : $y' = Ke^{Kx}$ $\quad y'' = K^2 e^{Kx}$

$\Rightarrow K^2 e^{Kx} + Ke^{Kx} - 2e^{Kx} = 0 \Leftrightarrow K^2 + K - 2 = 0$ résoudre avec Δ :

$K_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$ $\quad K_1 = 1$; $K_2 = 2 \Rightarrow y = c_1 e^{K_1 x} + c_2 e^{K_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

2/ $y'' + y = 0$ $\quad y = e^{Kx}$ on trouve $K_{1,2} = \pm i \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

3/ $y'' - y = 0 \Rightarrow K^2 - 1 = 0 \Rightarrow (K+1)(K-1) = 0$ $\quad K_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

4/ $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\quad y = e^{Kx} \Rightarrow K^2 + 2K + 5 = 0$ on trouve les racines

$K_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

b) $y'' + 9y = 0$ écrivons l'équation caractéristique par la substitution de $y = e^{Kx}$ dans l'équation diff on trouve $K^2 + 9 = 0$ ces racines sont

$K_1 = 3i$; $K_2 = -3i \Rightarrow y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$; cherchons la solution particulière

$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x = 0$ Pour $x = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$

P6

$y'|_{x=0} = 3$ dérivons $y \Rightarrow y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$ Pour $x=0$

$y' = 3 \Rightarrow 3 = -3c_1 \cdot 0 + 3c_2 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = 1$

la solution particulière est donc $y = \sin 3x$.

c) $y'' + y' = 4x^2 e^x$ la solution générale :

$y_g = y_h + y_p$ $\quad y_h$ la solution de l'équation homogène

$y'' + y' = 0$ l'équation caractéristique

$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k e^{kx} \Rightarrow y'' = k^2 e^{kx}$ donc $y'' + y' = k^2 e^{kx} + k e^{kx} = 0$

$\Rightarrow (k^2 + k) e^{kx} = 0 \overset{e^{kx} \neq 0}{\Rightarrow} k(k+1) = 0$ $\quad k_1 = 0$ et $k_2 = -1$

$y_h = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{-x} \Rightarrow y_h = c_1 + c_2 e^{-x}$

calculons maintenant la solution particulière d'après le tableau du cour on ici $\alpha = 1$ (le second membre qui s'écrit $4x^2 e^x$) $\alpha = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique ; donc la solution particulière sera chercher sous la forme $y_p = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x$

on va introduire cela ds l'équation initiale ~~et~~ simplifier par e^x et en identifiant les coefficients de mêmes puissances

$y_p' = (2A_1 x + A_2) e^x + e^x (A_1 x^2 + A_2 x + A_3)$

$y_p'' = 2A_1 e^x + e^x (2A_1 x + A_2) + (2A_1 x + A_2 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x$

$y_p'' + y_p' =$

$\Rightarrow (2A_1 + 2A_1 x + A_2 + 2A_1 x + A_2 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3) e^x$

$+ \left[(2A_1 x + A_2) + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 \right] e^x = 4x^2 e^x$

$$\begin{cases} 2A_1 x^2 = 4x^2 \Rightarrow 2A_1 = 4 \Rightarrow A_1 = 2 \\ (6A_1 + 2A_2) x = 0 \Rightarrow 12 + 2A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -6 \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3(-6) + 2A_3 = 0 \\ \qquad -14 + 2A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p = (2x^2 - 6x + 7) e^x \Rightarrow y_g = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7) e^x$

P7

2/ $y''+4y=\sin 2x$: eq homogène $y''+4y=0$

l'équation caractéristique est donnée par : $K^2+4=0$.

$\Rightarrow K_{1,2}=\mp 2i$ le nbre imaginaire par $K^2=-4 \Rightarrow \sqrt{K^2_{1,2}}=\pm i\sqrt{2}$

$y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; pour déterminer la solution particulière on vérifie au tableau ici on voit très bien que $\alpha=\pm 2i$ sont racines de l'équation caractéristique (le cas III.2) et le second membre est $\sin 2x$; les nbres $\pm 2i$ sont de multiplicité $s=1$ ds l'équation caractéristique donc on va chercher y_p sous forme $x(C_1$ [illegible] $2x+C_2$ [illegible] $2x)$

on a $y_p=x(C_1$ [illegible] $2x+C_2$ [illegible] $2x)$

$y_p'=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+x(C_1(-2\sin 2x)+2C_2\cos 2x))$

$y_p''=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+\left[-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x\right]$

$+x\left[-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x\right]$

$\Rightarrow y_p''+4y_p=\sin 2x \Rightarrow -4C_1\sin 2x+4C_2\cos 2x+x\left(\begin{matrix}-4C_1\cos 2x\\ -4C_2\sin 2x\end{matrix}\right)$

$+4x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)=\sin 2x$ par identification on trouve $-4C_1\sin 2x+4C_2\cos 2x=\sin 2x+0\cdot\cos 2x$

$\Rightarrow C_1=-\frac{1}{4}$ et $C_2=0 \Rightarrow y_p=-\frac{x}{4}\cos 2x$

donc $y_g=y_h+y_p=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\cos 2x$

3/ $y'''-y''=12x^2+6x$ $y_g=y_h+y_p$

y_h : $y'''-y''=0 \Rightarrow y=e^{Kx} \Rightarrow \underline{y'=Ke^{Kx}} \Rightarrow \underline{y''=K^2e^{Kx}} \Rightarrow \underline{y'''=K^3e^{Kx}}$

$\Rightarrow K^3e^{Kx}-K^2e^{Kx}=0 \Rightarrow K^3-K^2=0 \Rightarrow K^2(K-1)=0$

$K_{1,2}=0$ et $K_3=1$ la solution $y_h=C_1e^{0.x}+C_2xe^{0.x}+C_3e^{x}$

$y_h=C_1+C_2x+C_3e^{x}$; Puisque le nbre $\alpha=0$ est une racine double de l'équation caractéristique, il convient de chercher une solution particulière sous la forme voir tableau, cas I (2)

$y_p = x^2(A_1 x^2 + A_2 x + A_3)$ dérivons 3 fois

$y_p = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 \Rightarrow y_p' = 4A_1 x^3 + 3A_2 x^2 + 2A_3 x$

$y_p'' = 12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3 \Rightarrow y_p''' = 24A_1 x + 6A_2$

$\Rightarrow y_p''' - y_p'' = 12x^2 + 6x \Rightarrow 24A_1 x + 6A_2 - (12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3)$
$= 12x^2 + 6x$

$\Rightarrow -12A_1 x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + 6A_2 - 2A_3 = 12x^2 + 6x$

Par identification on trouve : $\begin{cases} -12A_1 = 12 \\ 24A_1 - 6A_2 = 6 \\ 6A_2 - 2A_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_1 = -1 \Rightarrow -24 - 6 = 6A_2$
$\Rightarrow -30 = 6A_2 \Rightarrow A_2 = -5$; $6(-5) - 2(A_3) = 0$

$2A_3 = -30 \Rightarrow A_3 = -15 \Rightarrow y_p = x^2(-x^2 - 5x - 15)$

$\Rightarrow y_g = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^2(x^2 + 5x + 15)$.

Partie a de l'exo4 n°5 $y''' + 2y'' + y' = 0$ $y = e^{kx}$

$\Rightarrow y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; $y''' = k^3 e^{kx}$ on introduit tout cela ds l'équation

$\Rightarrow k^3 e^{kx} + 2k^2 e^{kx} + ke^{kx} = 0 \Rightarrow k^3 + 2k^2 + k = 0$. $e^{kx} \neq 0$

$\Rightarrow k(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ et une racine double
$= k(k+1)^2 = 0$ $k_2 = k_3 = -1$
(multiplicité $s = 2$)

donc la solution de l'équation d'ordre 3 à coefficients constants

est : $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 x e^{-x}$, le principe reste le même

dans le cas où l'équation est d'ordre superieur à 2.

(ds cette équation l'ordre de la dérivée le plus elevé est 3)..

2/ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ $a = cste$.

$\boxed{P_4}$

donc on pose $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ on obtient une équation différentielle du premier ordre par rapport à p. L'équation différentielle devient $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$ séparons les variables :

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a} \Rightarrow \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \operatorname{arg}\operatorname{sh} p = \frac{x}{a} + c_1$$

$\Rightarrow p = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + c_1\right)$.

* $3\frac{d^2y}{dx^2} = y^{-5/3}$. même chose $p = \frac{dy}{dx}$ ici on a $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$.

maintenant considérons que p est une fonction de y.

$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$. par substitution dans l'équation diff on obtient : $3y'' = y^{-5/3} \Rightarrow 3p\frac{dp}{dy} = y^{-5/3}$

avec $y'' = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow \int 3p\,dp = \int y^{-5/3}dy \Rightarrow \frac{3}{2}p^2 = \frac{y^{-5/3+1}}{-5/3+1} + c_1$

$\Rightarrow \frac{3}{2}p^2 = \frac{y^{-2/3}}{-2/3} + c_1 \Rightarrow p^2 = c_1 - y^{-2/3}$ mais $p = \frac{dy}{dx}$

$p = \mp\sqrt{c_1 - y^{-2/3}}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{c_1 - y^{-2/3}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \pm\int\frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^{-2/3}}} = \int dx \Rightarrow x + c_2 = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^{-2/3}}} = \pm\int\frac{y^{1/3}dy}{\sqrt{c_1 y^{2/3} - 1}}$

on pose $t^2 = c_1 y^{2/3} - 1 \Rightarrow y^{1/3} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{c_1}} \Rightarrow dy = \frac{3t\,(t^2+1)^{1/2}}{c_1^{3/2}}dt$

$\Rightarrow \int\frac{y^{1/3}dy}{\sqrt{c_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{c_1^2}\int\frac{3t(t^2+1)}{t}dt = \frac{3}{c_1^2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right) = \frac{1}{c_1^2}\sqrt{c_1 y^{2/3} - 1}\,\left(c_1 y^{2/3} + 2\right)$

on trouve finalement $x + c_2 = \pm\frac{1}{c_1^2}\sqrt{c_1 y^{2/3} - 1}\,\left(c_1 y^{2/3} + 2\right)$.