Chapitre 3 : Produit de convolution

1. Introduction :

En mathématique, le produit de convolution est un opérateur bilinéaire et un produit commutatif, généralement noté « $*$ », qui, à deux fonctions f et g sur un même domaine infini, fait correspondre une autre fonction « f $*$ g » sur ce domaine, qui en tout point de celui-ci est égale à l'intégrale sur l'entièreté du domaine (ou la somme si celui-ci est discret) d'une des deux fonctions autour de ce point, pondérée par l'autre fonction autour de l'origine — les deux fonctions étant parcourues en sens contraire l'une de l'autre (nécessaire pour garantir la commutativité).

Le produit de convolution généralise l'idée de **moyenne glissante** et est la représentation mathématique de la notion de filtre linéaire. Il s'applique aussi bien à des données temporelles (en traitement du signal par exemple) qu'à des données spatiales (en traitement d'image).

2. Définition du produit de convolution :

Le produit de convolution des fonctions réelles ou complexes $f(t)$ et $g(t)$ est une autre fonction qui se note généralement $(f * g)$ et qui est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \, . \, g(t-\tau) \, d\tau$$

Dans le cas discret on écrit :

$$(f * g)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \, . \; g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m) \, . \; g(m)$$

τ et m étant des variables intermédiaires (muettes). Le produit de convolution est une opération couramment utilisée en traitement du signal, on peut considérer ces formules comme une généralisation de l'idée de moyenne mobile. la convolution sur l'espace des « fonctions » n'admet pas d'élément neutre.

3. Propriétés du produit de convolution :

3.1 Commutativité :

Le produit de convolution est commutatif

$$(f * g) = (g * f)$$

3.2 Associativité :

Le produit de convolution vérifie la loi de composition interne dite l'associativité

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3.3 Bilinéarité :

Le produit de convolution est bilinéaire

$$f * (g + \lambda h) = (f * g) + \lambda(f * h)$$

Il en résulte : $$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = (\lambda_1 f_1 * g) + (\lambda_2 f_2 * g)$$

Et : $$f * (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = (\mu_1 f * g_1) + (\mu_2 f * g_2)$$

λ_1, λ_2 , μ_1, μ_2 étant des constantes

3.4 Compatibilité avec les translations :

Le produit de convolution est compatible avec les translations temporelles. Notons τ_a la translation définie par :

$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

Alors :

$$(\tau_h f) * g = \tau_h (f * g)$$

3.5 La parité :

La convolution suit la règle des signes pour la parité des fonctions, si les deux fonctions f et g sont de parité différente, alors le produit de convolution $f * g$ est impaire. Si f et g ont même parité $f * g$ est paire.

Si : $$f(t-a) = f(-t-a)$$

Alors : $$(f * g)(t-a) = (f * g)(-t-a)$$

3.6 Intégration d'un produit de convolution :

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors $f * g$ est défini et intégrable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \,.\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, d\tau$$

En posant : $\tilde{t} = t - \tau$, $dt \rightarrow \widetilde{dt}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{t})\, d\tilde{t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, d\tau$$

Exemple : Soient les signaux $f(t)$ et g(t) suivants, calculons le produit de convolution $f * g$:

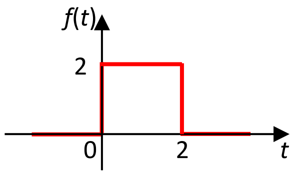

Fig 1. Représentation temporelle de $f(t)$

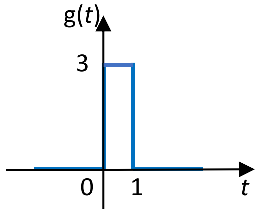

Fig 2. Représentation temporelle de g(t)

Remarque : Quel signal choisir pour faire un retournement et une translation temporelle ? il convient de choisir le signal le plus simple et le plus court en durée. Dans ce cas les 2 étant simples on va fixer f et faire le retournement de g puis le translater.

1ère étape : changement de variable pour le signal f. (Utilisons la variable intermédiaire τ)

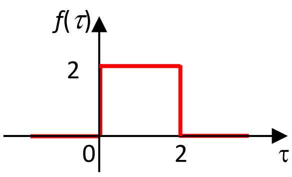

Fig 3. Représentation temporelle de $f(\tau)$

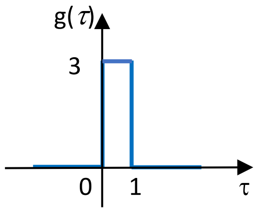

Fig 4. Représentation temporelle de g(τ)

2ème étape : faisons un retournement vertical (autour de l'axe des ordonnées) puis une translation du signal g en ajoutant $+t$. (Décalage ou avance du signal à gauche)

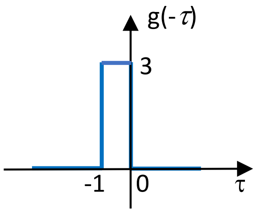

Fig 5. Retournement de g(τ)

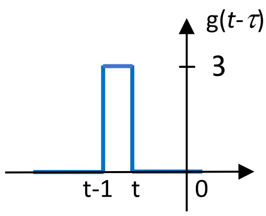

Fig 6. Translation de g(τ)

3ème étape : faisons le calcul du produit de convolution en s'intéressant aux différents intervalles

- <u>Cas 1 :</u>

  $t < 0$

  Il n'y a pas de recouvrement

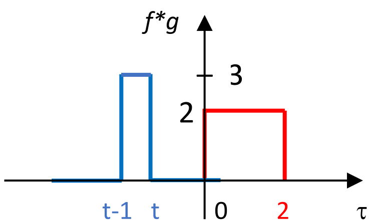

Fig 7. Convolution « Intervalle 1 »

- Cas 2 :

$$\begin{cases} t-1 \leq 0 \\ et \quad t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < t \leq 1$$

Il y a recouvrement

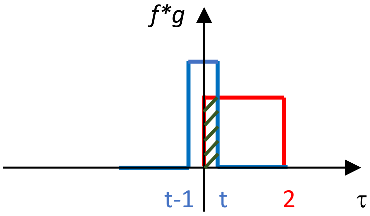

Fig 8. Convolution « Intervalle 2 »

- Cas 3 :

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ et \quad t-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1 < t \leq 2$$

Il y a recouvrement

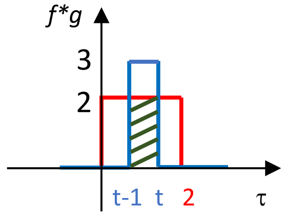

Fig 9. Convolution « Intervalle 3 »

- Cas 4 :

$$\begin{cases} t > 2 \\ et \quad t-1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 < t \leq 3$$

Il y a recouvrement

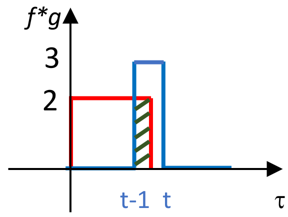

Fig 10. Convolution « Intervalle 4 »

- Cas 5 :

$$t-1 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad t > 3$$

Il n'y a pas de recouvrement

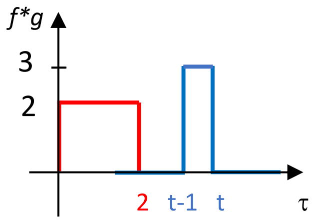

Fig 11. Convolution « Intervalle 5 »

4ème étape : Calculons exactement les zones de recouvrement en évaluant les intégrales pour chaque zone

- $$x(t)_{cas\ 2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,.\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t)_{cas\ 2} = \int_0^t 2 * 3\,d\tau = 6\tau \quad |_0^t = 6t$$

- $$x(t)_{cas\ 3} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,.\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t)_{cas\ 3} = \int_{t-1}^{t} 6\,d\tau = 6\tau \quad |_{t-1}^{t} = 6t - 6t + 6 = 6$$

- $$x(t)_{cas\ 4} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,.\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$x(t)_{cas\ 4} = \int_{t-1}^{2} 6\,d\tau = 6\tau \;\Big|_{t-1}^{2} = 12 - 6t + 6 = -6t + 18$$

5ème étape : Résumons le tout et représentons le tracé de la convolution

$$y(t) = \begin{cases} 6t & 0 < t \leq 1 \\ 6 & 1 < t \leq 2 \\ -6t + 18 & 2 < t \leq 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

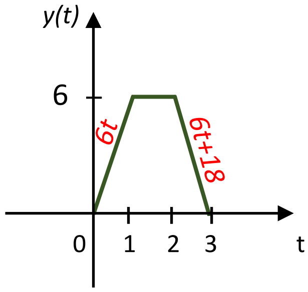

Fig 12. Produit de convolution $f * g$