U.B.M Annaba - Département de mathématiques-L3
Introduction aux Processus aléatoires -TD4-
Processus aléatoires

Par A. Redjil - Mai 2020

Exercice 1

On se place sur une espace probabilisé filtré $(\Omega, F, P, (F_t)_{t\geq 0})$.

On définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par: $X_t = E(X \mid F_t)$, avec X est une fonction de type L^1.
-Montrer que (X_t) est une $(F_t)-$ martingale.
Indication: Utiliser la définition de l'éspérance conditionnelle.

Exercice 2

Soit$(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standart, montrer que:
a)
i) Pour tout $t > 0$, $E[B_t] = 0$ et $E[B_t^2] = t$,
(ii) Pour tout $s, t > 0$, $E[B_s B_t] = s \wedge t$, avec $s \wedge t = min(s,t)$,
(b) Pour tout $a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ est un mouvement brownien,
(c)Pour tout $t_0 > 0$, $B_{t_0+t} - B_{t_0}$ est un mouvement brownien standart.

Exercice 3

Montrer que la marche aléatoire simple est une martingale à temps discret si elle est symétrique, i.e. si $p = \frac{1}{2}$.

Rappel: Marche aléatoire simple

Soit X un processus stochastique à espace des temps $\mathbb{N}$, espace d'états $\mathbb{Z}$ et défini de la manière suivante : $X_0 = 0$ et $Z_n = X_n - X_{n-1}$ est de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ et la famille des variables aléatoires
$(\mathbb{Z}_n)_{n\in N}$ est une famille indépendante.

Exercice 4

Soit $X \in L^1(\Omega, F, P)$, montrer que la famille des variables aléatoires $\{E[X \mid \sigma] : \sigma \subset F\}$est L^1bornée, c'est à dire: $\sup_{\sigma\subset F} E(E[X \mid \sigma]) \prec \infty$.

Exercice 5

Soient $(G_t)_{t>0}$, $(F_t)_{t>0}$ des filtrations vérifiant: $G_t \subset F_t$,pour tout $t > 0$.
On suppose qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$est G_t-adapté, montrer que:
Si (X_t) est une $(F_t)-$ martingale, alors (X_t) est une $(G_t)-$ martingale.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur (Ω, F, P) et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous tribus de F.
On suppose que $E\left[X_n \mid F_n\right]$ converge en probabilité vers 0.
1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Indication:
- On peut utiliser le raisonnement par l'absurde pour montrer la convergence en probabilité.
- Utiliser la sous tribu $F_n = \{\emptyset, \Omega\}$ pour montrer que la réciproque est fausse.