Module de Pobabilités 2
Chapitre 3 : processus de Poisson
Séance 11

Responsable du cours: Dr. **Metiri Farouk,**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Mail address: fmetiri@yahoo.fr

Section 3.5: Processus de Poisson Composé

Jusqu'à présent les processus étudiés ne permettaient pas que plusieurs événements se produisent en même temps, cela à cause de l'hypothèse suivante:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P\left[N(t+h) - N(t) \geq 2\right]}{h} = 0$$

On va donc maintenant introduire la notion de processus de Poisson composé qui lève cette hypothèse et permet ainsi des arrivées en "**grappes**" où l'amplitude des sauts est aléatoire .

Définition:

Un processus de comptage $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus de Poisson composé s'il peut s'écrire pour $t \geq 0$:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $(N(t))_{t\geq 0}$est un processus de poisson de paramètre λ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes, de même loi que Y - appelée distribution de gain – et indépendantes de $(N(t))_{t\geq 0}$.

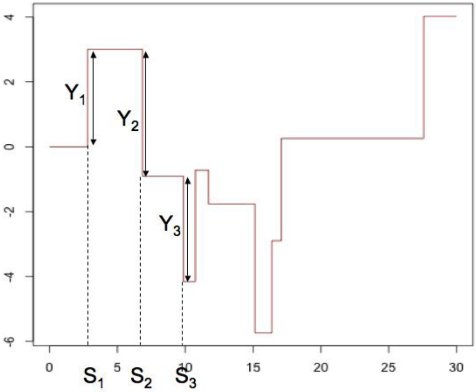


Figure: Une trajectoire du processus de Poisson composé d'intensité $\lambda = 3$ dont l'amplitude des sauts suit la loi uniforme sur $[-5, 5]$.

Un exemple d'un processus de Poisson composé pourrait être
- Le nombre de litres d'essence vendus à une pompe d'une station service. Le processus $\{N(t),t \geq 0\}$ est le processus d'arrivée des clients à cette pompe et pour le $n^{ième}$ client, Y_n est le nombre de litres qu'il a achetés.
- Ou par exemple Le nombre de sinistres déclarés dans une compagnie d'assurance, le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est le processus d'arrivée des sinistres à cette compagnie et pour le n^{ième} sinistre, Y_n est le montant que la compagnie devra débourser pour couvrir le sinistre
Cas particulier: Si $Y_i \equiv 1$, alors $X_t = N(t)$, on revient au processus de Poisson de base.

L'espérance et la variance de $\mathbf{X}_t$:
Pour calculer ces quantités on va conditionner par rapport à $N(t)$. Comme les Y_i sont indépendantes, de même loi et indépendants de N, en utilisant les résultats sur les sommes aléatoires (voir cours 08: **Espérance et variance d'une somme aléatoire de variables aléatoires, pages 13-17**), on a:

$$E\left[X_t\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t)\right]\right] = E\left[N(t)\right] E\left[Y\right] = \lambda t E\left[Y\right]$$

et

$$V\left[X_t\right] = E\left[Y\right]^2 V\left[N(t)\right] + V\left[Y\right] E\left[N(t)\right] = \lambda t \left(E\left[Y\right]^2 + V\left[Y\right]\right) = \lambda t E\left[Y^2\right]$$

Exemple 3.4:

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson d'intensité λ et si les variables aléatoires Y_i sont toutes des variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes, on a alors $X_t \sim P(\lambda tp)$

En effet, pour une variable $Y_t \sim Bern(p)$, on a $E\left[Y\right] = p$ et $E\left[Y^2\right] = V\left[Y\right] + E\left[Y\right]^2 = p(1-p) + p^2 = p$ et La fonction caractéristique pour Y est: $\Phi_Y(u) = pe^{iu} + (1-p)$.

on obtient alors les quantités suivantes:

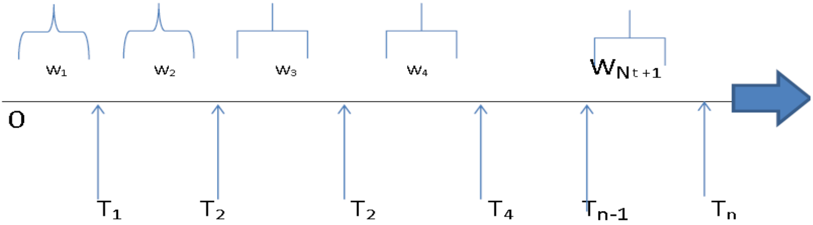
$$E\left[X_t\right] = E\left[N\right] E\left[Y\right] = \lambda t E\left[Y\right] = \lambda tp$$

$$V\left[X_t\right] = \lambda t E\left[Y^2\right] = \lambda tp$$

$$\Phi_{X_t}(u) = e^{\lambda t\left(pe^{iu} - p\right)} = e^{\lambda tp(e^{iu}-1)}$$

On retrouve ainsi la fonction caractéristique d'une variable de Poisson de paramètre λtp.

Temps d'inter-arrivées et temps d'occurrence:
Comme dans les cas précédents, intéressons nous à la distribution des temps d'inter-arrivées W_n d'un processus de Poisson composé.



Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé d'intensité λ défini au moyen du processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ et de la famille de variables aléatoires $\{Y_i, i = 0, 1, 2, ...\}$. Les *temps d'inter − arrivées* sont indépendants et identiquement distribués selon une loi *exponentielle* de paramètre λ.
Par définition d'un processus de Poisson composé, ses temps d'inter-arrivées sont ceux du processus de Poisson sous-jacent $\{N(t), t \geq 0\}$. On a immédiatement que $W_n \sim^{iid} \exp(\lambda)$.

Remarques:

(1) Voyons maintenant ce qu'il en est de la distribution des temps d'occurrence T_n d'un processus de Poisson composé. Le lien entre les variables aléatoires T_n et W_n est le même que dans le processus de base, c-à-d que l'on a

$$T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n \quad \forall n \geq 1$$

Par la proposition précédente et la propriété d'additivité des exponentielles, on obtient que:

$$T_n \sim Gamma(n, \lambda).$$

(2) Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé dont le processus sousjacent $\{N(t), t \geq 0\}$ est d'intensité λ. Sachant que $N(T) = n$, T étant fixé, la fonction de densité du temps d'occurrence du $n^{ième}$ saut est donnée par:

$$f_{T_n|N(T)=n}(t) = \frac{nt^{n-1}}{T^n}\chi_{[0,T[}(t)$$

Dans les mêmes conditions, la densité du temps d'occurrence du $(n+1)^{ième}$ saut est donnée par:

$$f_{T_{n+1}|N(T)=n}(t) = e^{-\lambda(t-T))}\lambda_{\chi[T,+\infty[}(t)$$

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson composé dont le processus de Poisson sous-jacent est $\{N(t), t \geq 0\}$ d'intensité λ. La densité conditionnelle de $(T_1, T_2, ..., T_n)$ sachant que $N(t) = n$ est donnée par:

$$f_{T_1,T_2,...,T_n|N(T)=n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{si } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est la densité des **statistiques d'ordre** d'un ensemble de n variables indépendantes et identiquement distribuées selon une **loi uniforme** sur $[0, t]$.

Exercice 3.5 :

Une compagnie d'assurance indémnise les sinistres dans ses contrats d'assurance vie qui sont selon un processus de Poisson de ayant un taux $\lambda = 5$ par semaine. Si le montant d'indémnisation pour chaque contrat suit la loi exponentielle de moyenne $2000DA$,

- Quelle est la moyenne et la variance du montant total des sinistres payés pour la durée de quatre semaines?

Exercice 3.6 :

(a) Le nombre N de réclamations pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson de paramètre λ. Le montant X de chaque réclamation suit une loi exponentielle également de paramètre λ. Soit T le montant total de toutes les réclamations. Trouver $E[T]$ et $Var\,[T]$.

(b) Une compagnie d'assurance assure ses dix pétroliers géants. Pour chaque pétrolier il y a une probabilité 0.01 de réclamation, indépendamment des autres pétroliers. Le montant $X > 0$ d'une réclamation pour un pétrolier est une variable aléatoire continue de moyenne 500 et variance 2500 (en millions de dinars).

- Trouver la variance de la réclamation totale pour ces dix polices.

(c) Le nombre de d'accidents causés par assuré suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 5$. On suppose que le nombre de personnes blessées dans chaque accident est de loi binomiale de paramètres 8 et 0.2.
- Quelle est le nombre total moyen des personnes blessées?

Exercice 3.7 :

Pendant la pandémie de $Covid - 19$ qui a touché le monde entier en 2020, On suppose que des familles se retournent en Algérie de taux 7 par jour. Si le nombre de personne dans chaque famille est indépendant et suit la loi suivante:

$$p(1) = \frac{1}{6}, p(2) = \frac{1}{6}, p(3) = \frac{1}{6}, p(4) = \frac{1}{6}.$$

(1) Déterminer le nombre moyen de personnes sur une période de 30 semaines ainsi que la variance du nombre moyen de personnes sur la même période.
(2) Calculer la probabilité qu'au moins 600 personnes rentrent au pays dans les prochains 30 semaines.

Solution 3.5 :
La charge totale des sinistres peut être modélisée par un processus de Poisson composé,
On a

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où $N(t)$ est un processus de poisson de paramètre $(5t)$ et Y_i est la v.a représentant le montant de chaque sinistre et qui suit la loi exponentielle $(\frac{1}{2000})$.
La charge moyenne des sinistres dans qutre semaines est:

$$E\left[X(4)\right] = E\left[N\right]E\left[Y\right] = 5 \times 4 \times 2000 = 40000DA$$

et

$$V\left[X(4)\right] = \lambda t E\left[Y^2\right] = 5{\times}4{\times}\left(V(Y) + E\left[Y\right]^2\right) = 5{\times}4{\times}\left((2000)^2 + (2000)^2\right)$$

Solution 3.6 :

(a)

$$E[T] = E[N]E[X] = \lambda\frac{1}{\lambda} = 1$$

$$Var[T] = \lambda t E[X^2] = \lambda \times \left(V(X) + E[X]^2\right) = \lambda \times \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda}$$

(b) On a: le nombre de réclamations N suit la la loi binomiale:
$N \sim B(10, 0.01)$, donc: $E[N] = 10 \times 0.01 = 0.1$ et
$Var(N) = 10 \times 0.01 \times (1 - 0.01) = 0.099$
Ainsi, $E[X] = 500$, $V(X) = 2500$.
La variance de la réclamation totale pour ces dix polices est:

$$\begin{aligned} Var[T] &= E[X]^2 Var(N) + Var(X)E[N] \\ &= (500)^2 (0.099) + (2500)(0.1) \\ &= 25000 \end{aligned}$$

(c) Le nombre total moyen des personnes blessées est:
$E[T] = E[N]E[X] = 5 \times 8 \times 0.2 = 8$ personnes.

Solution 3.7 :

(1) On modélise cette situation par un processus de Poisson composé où $N(t)$ représente le nombre de familles qui rentrent au pays et Y_i représentent le nombre de personnes dans chaque famille.

$$N(t) \sim Poisson(7t)$$

donc,

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Le nombre moyen de personnes rentrant au pays sur une période de 30 semaines est

$$E\left[X(30)\right] = E\left[N\right] E\left[Y\right] = 7 \times 30 \times E\left[Y\right] = 525$$

où

$$E[Y] = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{3} + 4.\frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V\left[X(30)\right] &= V\left[N\right]E\left[Y\right]^2 + E\left[N\right]V\left[Y\right] = \lambda t(E\left[Y\right]^2 + V\left[Y\right]) = \lambda t E\left[Y^2\right] \\ &= 7 \times 30 \times E\left[Y^2\right] = 7 \times 30 \times \frac{43}{6} = 1505 \end{aligned}$$

(2) Maintenant si on souhaite évaluer la probabilité qu'au moins 600 entrent au pays dans les prochains 30 jours,
Comme $X(30)$ est la somme de variables indépendantes et de même loi ayant une variance finie (on imagine $N(30)$ grand).

On va utiliser l'approximation par la loi normale en utilisant le théorème centrale limite:

$$
\begin{aligned}
P\left(X(30) \geq 600\right) &= P\left(\frac{X(30)-525}{\sqrt{1505}} \geq \frac{600-525}{\sqrt{1505}}\right) \\
&= P\left(\frac{X(30)-525}{\sqrt{1505}} \geq 1.93\right) \\
&= 1-P\left(\frac{X(30)-525}{\sqrt{1505}} < 1.93\right) \\
&= 1-\phi\left(1.93\right) \text{ est la fct de répartition de la loi } N(0,1) \\
&= 1-0.9732 = 0.0268
\end{aligned}
$$

Bon courage