Solution de la serie n°4.

Exercice 1

$$H = \begin{pmatrix} 2E_0 & \alpha & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_0 = \hbar\omega \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$H|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle$$

1/a) La condition sur α pour que H soit hermétique ?

H hermétique $\Leftrightarrow H = H^+$

$H^+ = (H^t)^*$

$$(H^t)^* = \begin{pmatrix} 2E_0 & 0 & 0 \\ \alpha & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2E_0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$H = H^+ \Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha^* = 0}$

b) $\alpha = 0$

$$H = E_0\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \hbar\omega$$

H est diagonale et symétrique donc les valeurs propres E_n et les vecteurs propres $|u_n\rangle$ correspondants sont :

$$H \rightarrow \begin{cases} E_1 = 2\hbar\omega \rightarrow |E_1\rangle = |u_1\rangle \\ E_2 = \hbar\omega \rightarrow |E_2\rangle = |u_2\rangle \\ E_3 = 0 \rightarrow |E_3\rangle = |u_3\rangle \end{cases}$$

2/ A l'instant $t=0$, le système se trouve dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|u_1\rangle - \sqrt{2}|u_2\rangle + |u_3\rangle)$$

a) On mesure l'énergie du système à cet instant on aura alors :

résultats	Projecteurs	Probabilités
$E_1 = 2E_0$	$\|u_1\rangle\langle u_1\|$	$P(E_1) = \|\langle u_1\|\psi(0)\rangle\|^2 = \frac{1}{4}$
$E_2 = E_0$	$\|u_2\rangle\langle u_2\|$	$P(E_2) = \|\langle u_2\|\psi(0)\rangle\|^2 = \frac{1}{2}$
$E_3 = 0$	$\|u_3\rangle\langle u_3\|$	$P(E_3) = \|\langle u_3\|\psi(0)\rangle\|^2 = \frac{1}{4}$

$$\sum_{i=1}^{3} P(E_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

b) Si le résultat de la mesure d'énergie est E_0, l'état du système immédiatement après la mesure est : $\boxed{|\psi'(0)\rangle = |u_2\rangle}$

c) Calcule de la valeur moyenne $\langle H\rangle(0)$:

Méthode 1 :

$$\langle H\rangle = \frac{\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle}$$

$$= \langle\psi(0)|H[\tfrac{1}{2}|u_1\rangle - \sqrt{2}|u_2\rangle + u_3\rangle]$$

$$= \langle\psi(0)|\tfrac{1}{2}(E_1|u_1\rangle - \sqrt{2}E_2|u_3\rangle + \overset{0}{E_3}|u_3\rangle)$$

$$= \frac{1}{4}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{4}2E_0 + \frac{1}{2}E_0 = E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H\rangle = E_0 = \hbar\omega}$$

Méthode 2 :

$$\langle H\rangle = \sum_{i=1}^{3} P(E_i)E_i = E_1\cdot\frac{1}{4} + E_2\cdot\frac{1}{2} + E_3\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 2E_0\frac{1}{4} + E_0\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4}$$

$$= E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle H\rangle = E_0 = \hbar\omega}$$

3/ L'état de système $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t>0$

Puisque le système est conservatif donc on peut écrire :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{3} C_n(0)\, e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}} |u_n\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-i2\omega t} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} |u_2\rangle + \frac{1}{2} e^{i0} |u_3\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \left(e^{-i\omega t} |u_1\rangle - \sqrt{2} |u_2\rangle + e^{i\omega t} |u_3\rangle \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega t} |u_1\rangle - \sqrt{2} |u_2\rangle + e^{i\omega t} |u_3\rangle \right)}$$

$e^{-i\omega t}$: facteur de phase on peut le negliger

Exercice:

On a un espace d'état aux vecteurs de la base orthonormée et complète $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$

l'hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H = \hbar\omega_0 \cdot \sigma_3$$

où : $\sigma_3 |u_i\rangle = \varepsilon \frac{1}{2} |u_i\rangle$, $\varepsilon = \begin{cases} 1 : i = 1 \\ -1 : i = 2 \end{cases}$

1°/ calcule la matrice représentant l'hamiltonien H :

$$\sigma_3 |u_1\rangle = \frac{1}{2} |u_1\rangle$$

$$\sigma_3 |u_2\rangle = -\frac{1}{2} |u_2\rangle$$

donc on peut écrire la matrice de σ_3 :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} (\sigma_3)_{11} & (\sigma_3)_{12} \\ (\sigma_3)_{21} & (\sigma_3)_{22} \end{pmatrix} : \quad \begin{aligned} (\sigma_3)_{11} &= \langle u_1|\sigma_3|u_1\rangle = \frac{1}{2} \\ (\sigma_3)_{12} &= \langle u_1|\sigma_3|u_2\rangle = 0 \\ (\sigma_3)_{21} &= \langle u_2|\sigma_3|u_1\rangle = 0 \\ (\sigma_3)_{22} &= \langle u_2|\sigma_3|u_2\rangle = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice représentant H s'écrit :

$$H = \hbar\omega_0 \sigma_3 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2°/ H est hermétique ?

On remarque que la matrice représentant l'hamiltonien H réelle et symétrique donc elle est hermétique

donc on peut lire directement les valeurs propres sur la diagonale :

$$H \begin{cases} E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \rightarrow |E_1\rangle = |u_1\rangle \\ E_2 = \frac{-\hbar\omega_0}{2} \rightarrow |E_2\rangle = |u_2\rangle \end{cases}$$

3°/ A l'instant $t = 0$

l'état du système se trouve :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|u_1\rangle + |u_2\rangle \right)$$

La mesure de l'énergie donne les résultats et les probabilités :

résultats	Projecteurs	Probabilité
$E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$	$\|u_1\rangle\langle u_1\|$	$P(E_1) = \|\langle u_1\|\psi(0)\rangle\|^2 = \frac{1}{2}$
$E_2 = \frac{-\hbar\omega_0}{2}$	$\|u_2\rangle\langle u_2\|$	$P(E_2) = \|\langle u_2\|\psi(0)\rangle\|^2 = \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{2} P(E_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

4°/ Au lieu de faire les mesures précédentes, le système évolue sous l'influence de l'hamiltonien

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) les niveaux d'énergies et les états stationnaires du système

$H = \hbar\omega_0\, \sigma \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Les niveaux d'énergies de σ :

$\det(\sigma - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - i^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

donc les niveaux d'énergies de H :

$H \begin{cases} E_1 = \hbar\omega_0 \\ E_2 = -\hbar\omega_0 \end{cases}$

On peut calculer les vecteurs propres :

$H|E_1\rangle = E_1|E_1\rangle$

$|E_1\rangle = x|u_1\rangle + y|u_2\rangle$

$\Rightarrow E_1 = \hbar\omega_0 \rightarrow |E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i|u_2\rangle)$

$E_2 = -\hbar\omega_0 \rightarrow |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - i|u_2\rangle)$

b) l'état de système $|\psi(t)\rangle$ à $t>0$

l'état du système s'écrit :

$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{2} C_n(0)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle$

et on a l'état du système à $t=0$:

$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$

On remarque qu'elle n'est pas développée sur les états propres de H ;

donc on a :

$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i|u_2\rangle) \rightarrow ①$

$|E_2\rangle = \frac{1}{2}(|u_2\rangle - i|u_1\rangle) \rightarrow ②$

$① + ② \Rightarrow |u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle)$

$① - ② \Rightarrow |u_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle - |E_2\rangle)$

donc l'état du système à $t=0$ s'écrit sous la forme :

$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle) + \frac{i}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle - |E_2\rangle)\right\}$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(1-i)|E_1\rangle + \frac{1}{2}(1+i)|E_2\rangle$

On obtient l'état : $|\psi(t)\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{2} C_n(0)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |E_n\rangle$

$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(1-i)e^{-i\omega_0 t}|E_1\rangle + \frac{1}{2}(1+i)e^{i\omega_0 t}|E_2\rangle}$

C'est l'état $|\psi(t)\rangle$ ds la base H,

On peut trouver la base donnée :

$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(1-i)\, e^{-i\omega_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i|u_2\rangle) +$

$\frac{1}{2}(1+i)\, e^{i\omega_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - i|u_2\rangle)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1-i)e^{-i\omega_0 t} + (1+i)e^{i\omega_0 t}\right]|u_1\rangle +$

$\frac{i}{2\sqrt{2}}\left[(1-i)e^{-i\omega_0 t} - (1+i)e^{i\omega_0 t}\right]|u_2\rangle$

$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t)|u_1\rangle + (\cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t)|u_2\rangle\right]}$

c) La mesure de l'énergie à $t>0$

Résultats	Projecteurs	Probabilité
$E_1 = \hbar\omega_0$	$\lvert E_1\rangle\langle E_1\rvert$	$P(E_1) = \lvert\langle E_1\lvert\psi(t)\rangle\rvert^2 = \frac{1}{2}$
$E_2 = -\hbar\omega$	$\lvert E_2\rangle\langle E_2\rvert$	$P(E_2) = \lvert\langle E_2\lvert\psi(t)\rangle\rvert^2 = \frac{1}{2}$

$\sum_{i=1}^{2} P(E_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$