Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar Annaba

Cours « **Combustion** » pour les étudiants de **Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

Chapitre 3 : Équations des écoulements réactifs (suite)

3- Création ou détérioration de la masse : La masse d'une espèce, i, peut être créée (générée) ou détruite par des réactions chimiques à une vitesse donnée par :

$$\dot{m}'''_{\mathrm{gen},i} = \hat{\dot{r}}_i M_i \tag{4.10}$$

qui représente une grandeur volumétrique avec des unités de kg/m^3 s. M_i est la masse moléculaire de l'espèce i (kg/kmole), et $\hat{\dot{r}}_i$ est le taux de production molaire en (kmole/m^3 s).

3.3 Equations de conservation de la masse et des espèces chimiques

Étant donné que la combustion ne crée ni ne détruit de masse, l'équation de conservation de la masse (ou continuité) s'applique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{u}\right) = 0 \tag{4.11}$$

Dans une dimension avec x étant la coordonnée, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho \mathbf{u}\right)}{\partial x} = 0 \tag{4.12}$$

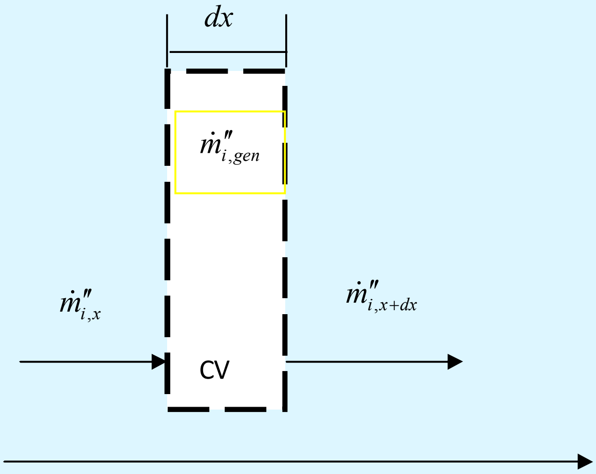

Figure 4.3 : Volume de contrôle unidimensionnel pour la conservation des espèces

Bien que la masse globale soit conservée, la combustion crée et détruit des espèces individuelles. En plus de l'ensemble habituel des lois d'équilibre, la prédiction des processus de combustion nécessite des relations supplémentaires pour suivre chaque espèce chimique. Pour les combustibles gazeux, une **équation simplifiée** de conservation des espèces 1-D peut être dérivée sur la base de modèles pour l'advection, la diffusion et la génération dues aux réactions chimiques. Considérons un domaine unidimensionnel avec une largeur différentielle dx et une zone d'unité sur la figure 4.3. Le volume de ce volume de contrôle avec zone d'unité est $V = dx \times 1 = dx$. La conservation des espèces donne :

$$\frac{d\dot{m}_{i,CV}}{dt} = \dot{m}''_{i,x} - \dot{m}''_{i,x+dx} + \dot{m}'''_{\text{gen},i}dx \qquad (4.13)$$

où le flux massique dû à la convection et à la diffusion peut être exprimé tel que

$$\dot{m}''_{i,x} = \dot{m}''_{adv} + \dot{m}''_{D,i} = \rho u y_i - \rho D_i \frac{\partial y_i}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dot{m}''_{i,x+dx} = \dot{m}''_{i,x} + \frac{\partial \dot{m}''_{i,x}}{\partial x}dx \qquad (4.14)$$

Par conséquent, Eq. 4.13 devient

$$\frac{\partial \dot{m}_{i,CV}}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m}''_{i,x}}{\partial x}dx + \dot{m}'''_{\text{gen},i}dx \qquad (4.15)$$

La masse des espèces i dans le volume de contrôle est $\dot{m}_{i,CV} = \rho_i V = \rho y_i V$. La substitution de l'Eq. 4.14 dans Eq. 4.15 conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho y_i)dx = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u y_i)dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_i \frac{\partial y_i}{\partial x}\right)dx + \hat{\dot{r}}_i M_i dx \qquad (4.16)$$

Après avoir éliminé dx, on obtient

$$\frac{\partial(\rho y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u y_i)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_i \frac{\partial y_i}{\partial x}\right) + \hat{\dot{r}}_i M_i \qquad (4.17)$$

En utilisant l'équation de continuité 4.12, le côté gauche de l'équation 4.17 peut encore être simplifié

$$\rho \frac{\partial y_i}{\partial t} + \rho u \frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_i \frac{\partial y_i}{\partial x}\right) + \hat{\dot{r}}_i M_i \qquad (4.18)$$

En supposant que ρD_i est constant (voir Remarque 4.1), l'équation 4.18 est simplifié comme

$$\rho\frac{\partial y_i}{\partial t}+\rho u\frac{\partial y_i}{\partial x}=\rho D_i\left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2}\right)+\hat{\dot{r}}_i M_i \qquad (4.19)$$

3.4 Equation de conservation de la quantité de mouvement

La conservation de l'équation de la quantité de mouvement dans un système avec combustion est la même que dans les systèmes ne réagissant pas. L'équation la quantité de mouvement dans la direction x est donnée par

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F_X \qquad (4.20)$$

où u est la vitesse et F_X est la force de volume.

3.5 Equation de conservation de l'énergie

Les processus de combustion impliquent plusieurs processus physiques, y compris le transfert des réactifs à travers les écoulements de fluides, le transfert de chaleur et de masse et la cinétique chimique. Pour les combustibles gazeux, une équation énergétique 1-D simplifiée (première loi de la thermodynamique) peut être découlée sur la base de modèles pour ces processus.

3.5.1 Termes dans l'équation de conservation de l'énergie

a) Conduction : loi de Fourier de conduction thermique $\dot{q}''_{cond}=-k\,\partial T/\partial x$ où k est la conductivité (W/m-K).

b) Advection : $\dot{q}''_{conv}=\rho u h$, où h est l'enthalpie spécifique, u est la vitesse du fluide et ρ est la masse volumique.

c) Perte de chaleur par rayonnement : $\dot{q}''_{rad}=\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)$ où ε est l'émissivité du corps (ε = 1 pour le corps noir) et σ_s = constante de Stefan-Boltzmann σ_s = 5,67x10-8 (W/m^{2}K^4).

d) Combustion : traitée comme une génération de chaleur interne où $\dot{q}_{gen}=\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c\,V$.

e) Diffusion de masse : Lorsque la chaleur et la diffusivité spécifiques cp et D, sont supposées constantes, l'énergie transportée par la diffusion de différentes espèces est nulle, comme indiqué ci-dessous. **Premièrement,** lorsque la diffusion se produit, les molécules se déplacent en moyenne à une vitesse différente de la vitesse du fluide « bulk fluid velocity ». La différence de vitesse est appelée la vitesse « diffusive », v_i, et elle est liée au gradient moyen des espèces comme :

$$v_i = -\frac{D}{y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x} \qquad \text{(Voir Remarque 4.1)} \qquad (4.21a)$$

Ensuite, l'énergie transférée par la « diffusion » est égale à

$$\sum_{i=1}^{K} \rho v_i y_i h_i \qquad (4.21b)$$

et peut être exprimé en termes de gradient d'espèces tel que :

$$\sum_{i=1}^{K} \rho v_i y_i h_i = -\sum_{i=1}^{K} \rho D \frac{\partial y_i}{\partial x} h_i \qquad (4.21c)$$

En utilisant la règle de différenciation des produits à l'envers, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{K} \rho v_i y_i h_i &= -\sum_{i=1}^{K} \rho D \frac{\partial y_i}{\partial x} h_i \\ &= -\sum_{i=1}^{K} \rho D \frac{\partial (y_i h_i)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{K} \rho D \frac{\partial (h_i)}{\partial x} y_i = -\rho D \frac{\partial h}{\partial x} + \rho D \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial (h_i)}{\partial x} y_i\end{aligned} \qquad (4.21d)$$

Pour simplifier, supposons que cp soit constant, alors nous avons

$$\frac{\partial h}{\partial x} = c_p \frac{\partial T}{\partial x}$$

et

$$\sum_{i=1}^{K} \rho v_i y_i h_i = -\rho D \frac{\partial h}{\partial x} + \rho D \sum_{i=1}^{K} c_p \frac{\partial T}{\partial x} y_i = -\rho D c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho D c_p \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (4.21f)$$

Remarque 4.1:

- -Pour la combustion à pression constante, ρ est proportionnelle à $1/T$ et D_i est proportionnel à $\sqrt{T^3}$; par conséquent ρD_i est proportionnel à $\sqrt{T}$. Pour la combustion courante de carburants hydrocarbonés, la température change d'un facteur 7, l'augmentation correspondante de ρD_i est d'un facteur 2,64.

- -La vitesse de diffusion dépend principalement du gradient de concentration. Le gradient de température (diffusion thermique) et le gradient de pression contribuent également à la vitesse de diffusion.

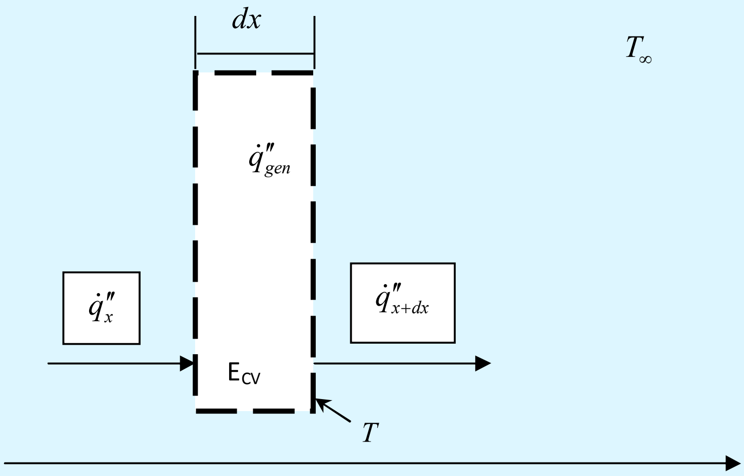

Figure 4.4 : Volume de contrôle unidimensionnel pour la conservation de l'énergie

3.5.2 Dérivation d'une équation de conservation de l'énergie en 1-D

Considérons un domaine unidimensionnel avec une distance différentielle de dx et une zone d'unité comme le montre la figure 4.4. Le volume du volume de contrôle est V = dx. La première loi de la thermodynamique donne

$$\frac{\partial E_{CV}}{\partial t} = \left(\dot{q}''_x - \dot{q}''_{x+dx}\right) - A\varepsilon\sigma_s\left(T^4 - T_\infty^4\right) + \hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c\,V \qquad (4.22)$$

où E_{CV} est l'énergie interne à l'intérieur du volume de contrôle et A est l'aire de la surface rayonnante, et

$$\dot{q}''_x = \left(\dot{q}''_{conv} + \dot{q}''_{cond}\right)_x = \rho u h + k\frac{\partial T}{\partial x}$$

en utilisant la relation thermodynamique

$$E_{CV} = m\mathrm{u} = m\left(h - pv\right) = mh - pV = \rho V h - pV$$

l'équation d'énergie ci-dessus devient

$$\frac{\partial(\rho V h)}{\partial t}-\frac{\partial(pV)}{\partial t}=\left(\dot{q}''_x-\dot{q}''_{x+dx}\right)-A\,\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)+\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c\,V$$

La division de l'équation ci-dessus par V conduit à

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\left(\dot{q}''_x-\dot{q}''_{x+dx}\right)}{dx}-\frac{A}{V}\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)+\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c$$

Ensuite en substituant la relation

$$\dot{q}''_x=\rho u h-k\frac{\partial T}{\partial x}$$

en prenant la limite dx ➔ 0, et en réorganisant les résultats, nous avons

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{A}{V}\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)+\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c$$

L’utilisation de l'équation de continuité (équation 4.12)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$$

l'équation de l’énergie devient

$$\rho\frac{\partial h}{\partial t}+\rho u\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{A}{V}\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)+\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c$$

Mais, l'enthalpie totale est

$$h=\Delta h^0+\int_{T_0}^{T}c_p(T)\,dT$$

Pour simplifier, supposons que cp soit constant, alors nous avons $\partial h/\partial t=c_p\,\partial T/\partial t$ et $\partial h/\partial x=c_p\,\partial T/\partial x$. En supposant que $\partial p/\partial t=0$ et k = constant, l'équation de l’énergie 1-D simplifiée en termes de température (avec cp et k constants) est

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}=+k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{A}{V}\varepsilon\,\sigma_s\left(T^4-T_\infty^4\right)+\hat{\dot{r}}_{fuel}\,\hat{Q}_c \qquad (4.23)$$

Le terme de perte de chaleur par rayonnement est écrit pour un cas général où A est la zone du corps rayonnant. Par exemple, les particules de suie rayonnent la chaleur vers l'environnement. Dans ce cas, A est la surface totale des particules de suie dans le volume V.