# Imagerie et Vision Industrielle

4: Filtrage Linéaire d'Image

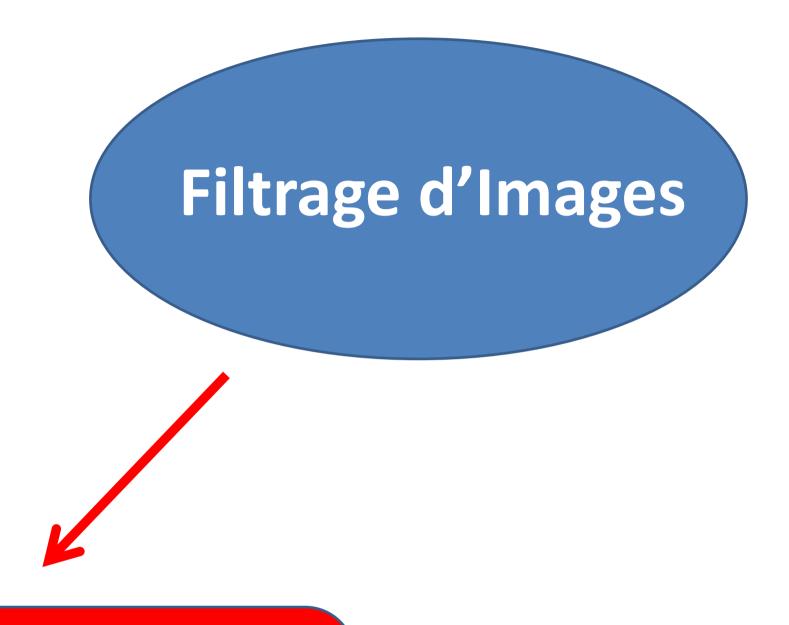
#### Menu du Jour

#### Filtrage d'Images

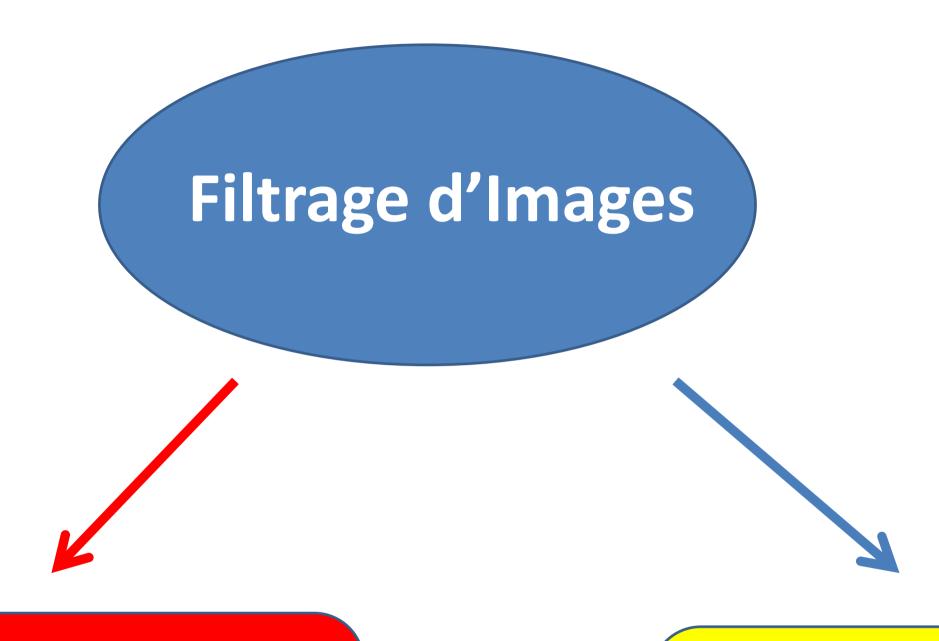
- Image comme fonction
- Filtres Linéaires

— Exemples de filtres: Box, Gaussien





Filtrage Spatial

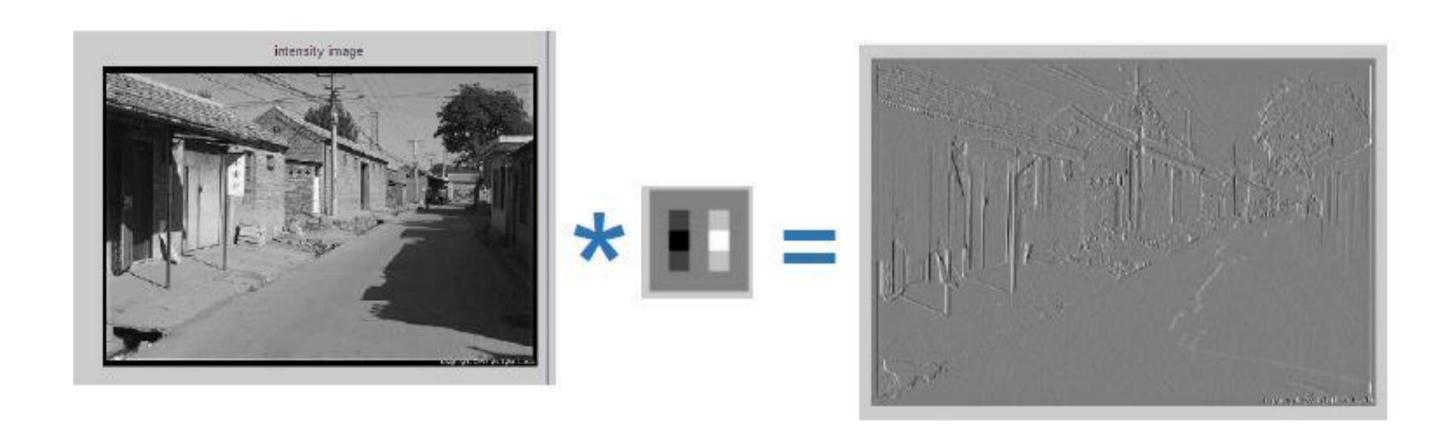


Filtrage Spatial

Filtrage Frequentiel

# Filtrage dans le domaine spatial

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1



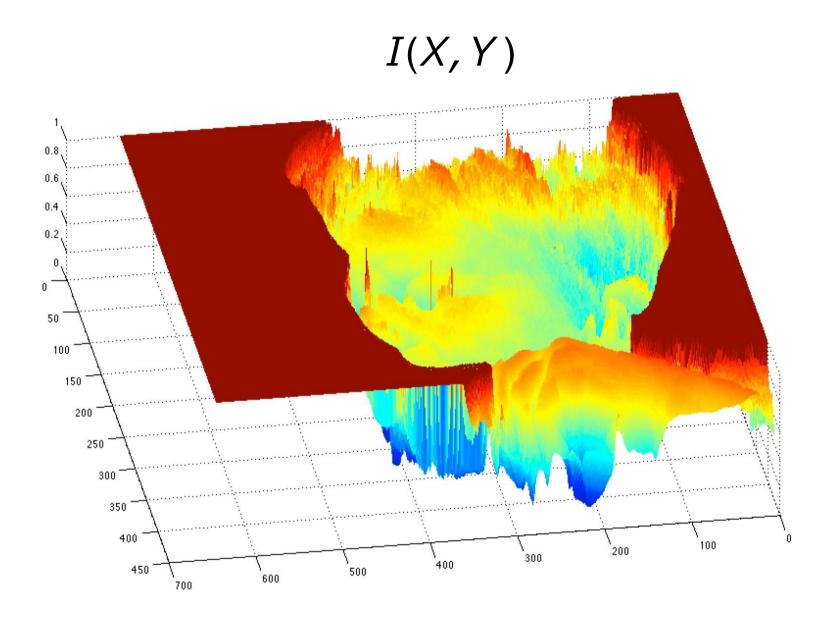
# Filtrage dans le domaine Fréquentiel FFT Inverse FFT

#### Image comme Fonction 2D

Une image à niveaux de gris (grayscale) est une fonction 2D



Image à niveaux de gris

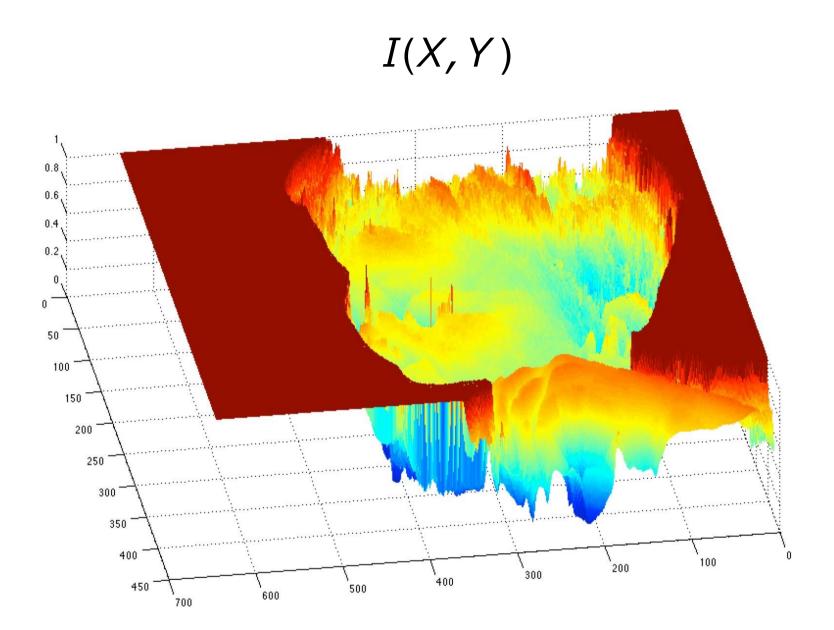


#### Image comme Fonction 2D

Une image à niveaux de gris (grayscale) est une fonction 2D



Image à niveaux de gris



**domaine**:  $(X, Y) \equiv ([1, largeur], [1, hauteur])$ 

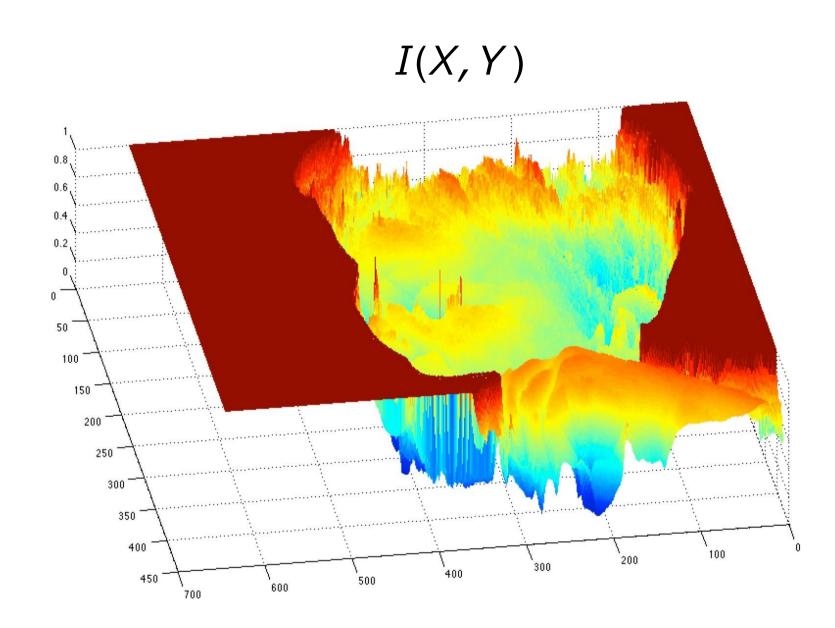
#### Image comme fonction 2D

Une image à niveaux de gris (grayscale) est une fonction 2D



Image à niveaux de gris

Quelle est la dynamique de cette fonction image?



**domaine**:  $(X, Y) \equiv ([1, largeur], [1, hauteur])$ 

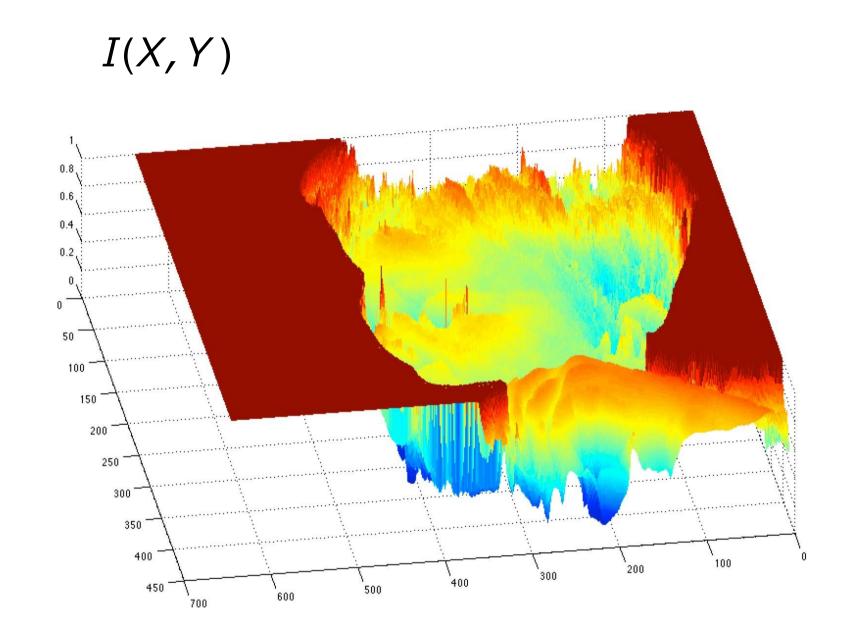
#### Image comme fonction 2D

image (niveaux de gris) (grayscale)



Image à niveaux de gris

Quelle est la dynamique de cette fonction image?  $I(X, Y) \in [0, 255]$ 



**domaine**:  $(X, Y) \equiv ([1, largeur], [1, hauteur])$ 

Puisque les images sont des fonctions, on peut donc leur appliquer des operations, e.g., moyenne (average)



I(X, Y)



G(X,Y)



$$\frac{I(X,Y)}{2} + \frac{G(X,Y)}{2}$$



$$a = \frac{I(X,Y)}{2} + \frac{G(X,Y)}{2}$$



$$b = \frac{I(X, Y) + G(X, Y)}{2}$$



$$a = \frac{I(X, Y)}{2} + \frac{G(X, Y)}{2}$$



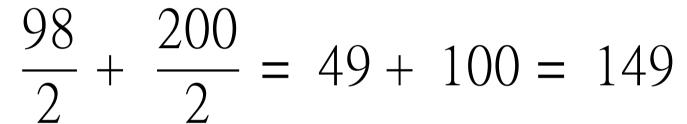
$$b = \frac{I(X, Y) + G(X, Y)}{2}$$

#### **Question:**

$$a = b$$



pixel en rouge (image cameraman) = 98 pixel en rouge (image de la lune) = 200

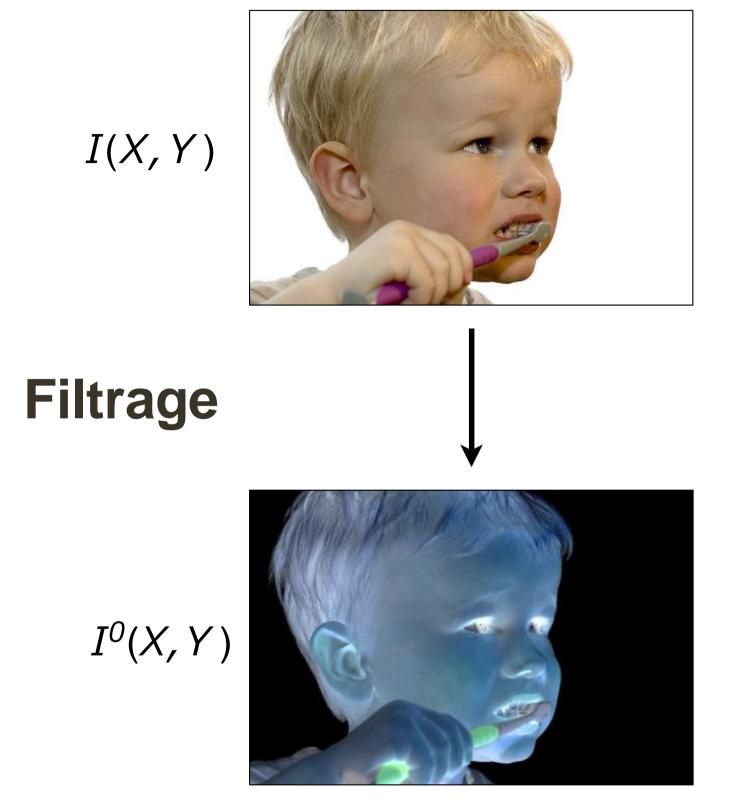


$$\frac{98 + 200}{2} = \frac{[298]}{2} = \frac{255}{2} = 127$$

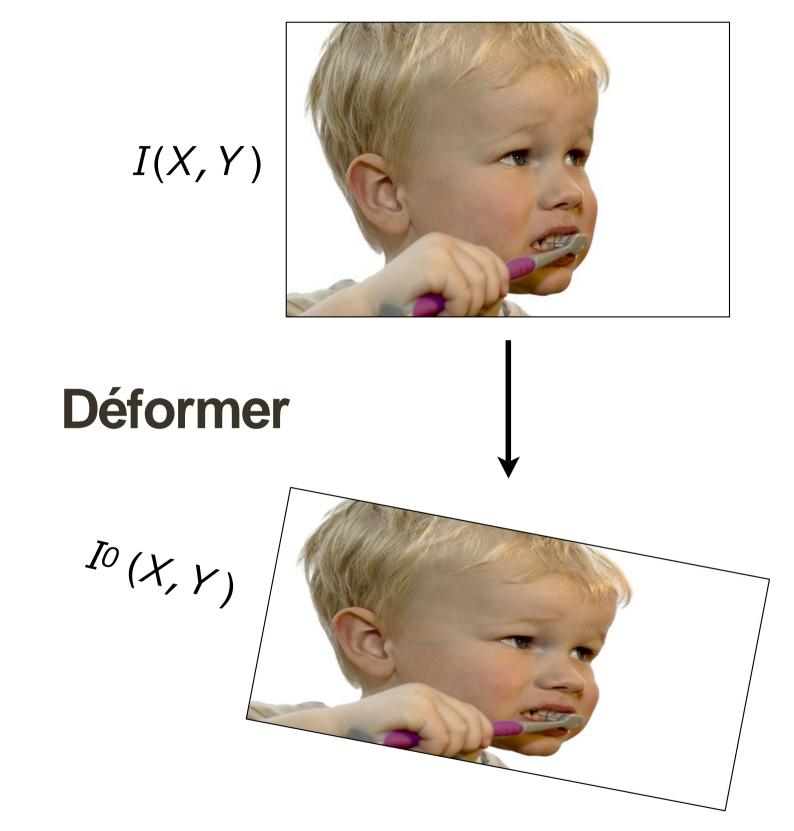
#### **Question:**

$$a = b$$

#### Types de transformations qu'on peut faire?



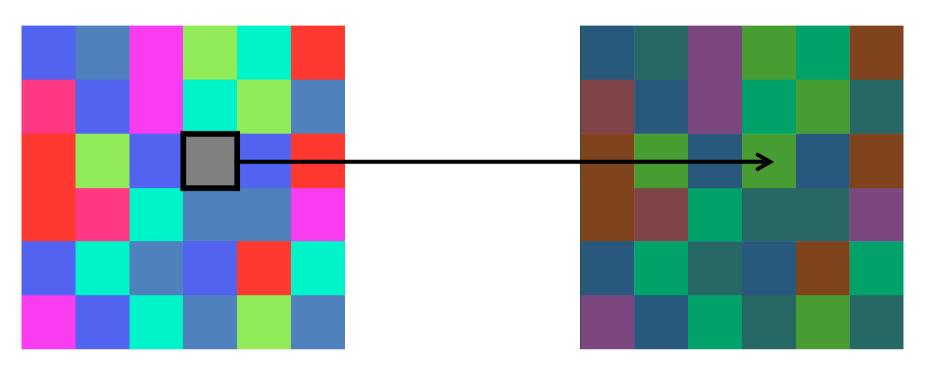
Changer la dynamique de la fonction image



Changer le domaine de la fonction image

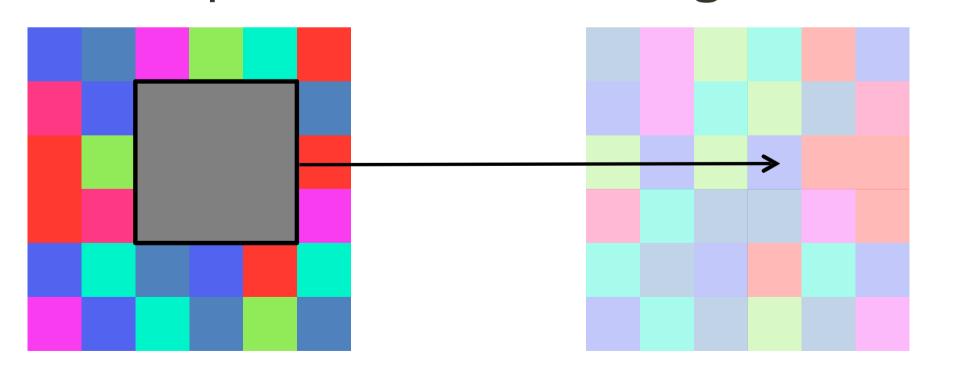
# Types de filtrage?

#### Operation Point



Traitement ponctuel

#### Operation sur Voisinage

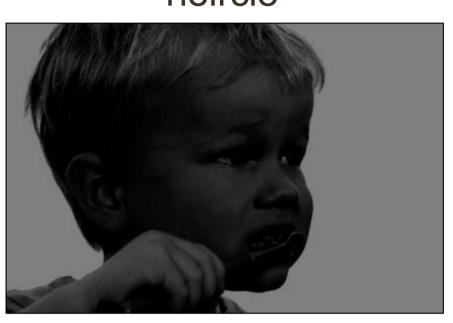


"filtrage"

originale



noircie



Contraste réduit



I(X, Y)

inverser



illuminer



Contraste élevé



originale





Contraste réduit



I(X, Y)

I(X, Y) - 128

I(X, I) = 120

inverser illuminer





Contraste élevé

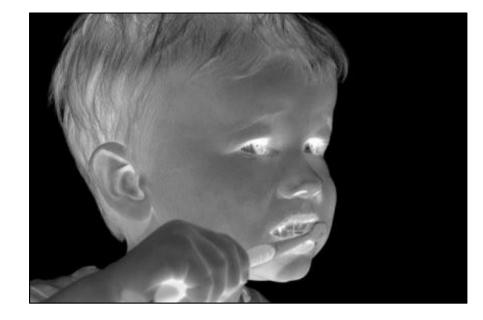


originale



I(X, Y)

inverser



noircie

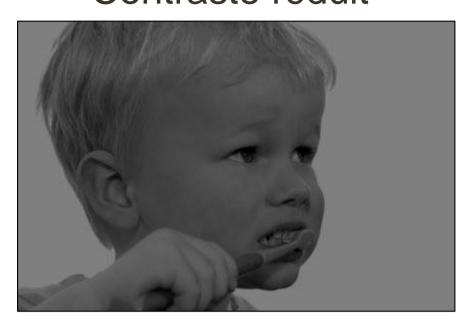


I(X, Y) - 128





Contraste réduit



 $\frac{I(X,Y)}{2t}$ 

Contraste élevé



originale



I(X, Y)

inverser



noircie

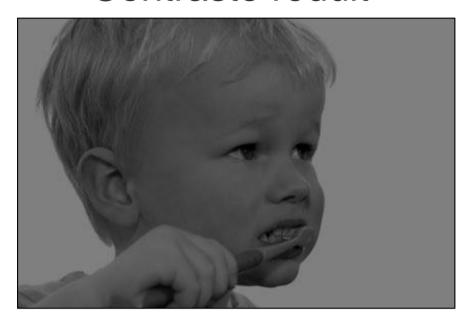


I(X, Y) - 128

illuminer



Contraste réduit



*I(X, Y)*2

Contraste élevé



originale



I(X, Y)

inverser



255 - I(X, Y)

noircie



I(X, Y) - 128





Contraste réduit



*I(X, Y)*2

Contraste élevé



originale



I(X, Y)

inverser



255 - I(X, Y)

noircie



I(X, Y) - 128

illuminer



$$I(X, Y) + 128$$

Contraste réduit



*I(X, Y)*2

Contraste élevé



originale



I(X, Y)

inverser



255 - I(X, Y)

noircie



I(X, Y) - 128

illuminer



$$I(X, Y) + 128$$

Contraste réduit



<u>I(X, Y)</u> 2

Contraste élevé



$$I(X, Y) *2$$

originale



I(X, Y)

inverser



255 - I(X, Y)

noircie



I(X, Y) - 128

illuminer



$$I(X, Y) + 128$$

Contraste réduit



<u>I(X, Y)</u> 2

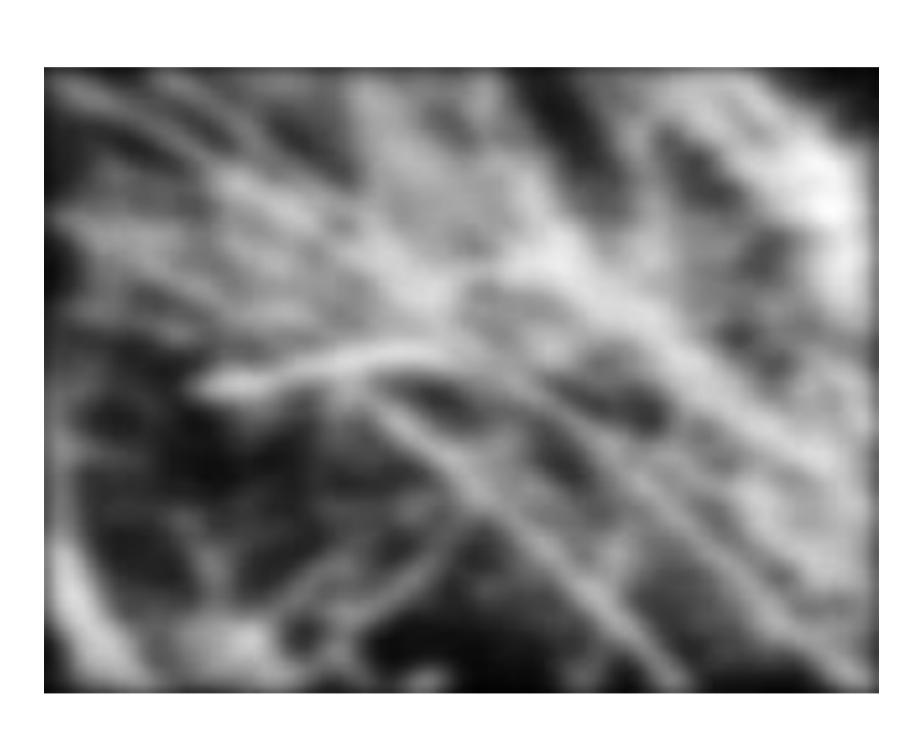
Contraste élevé



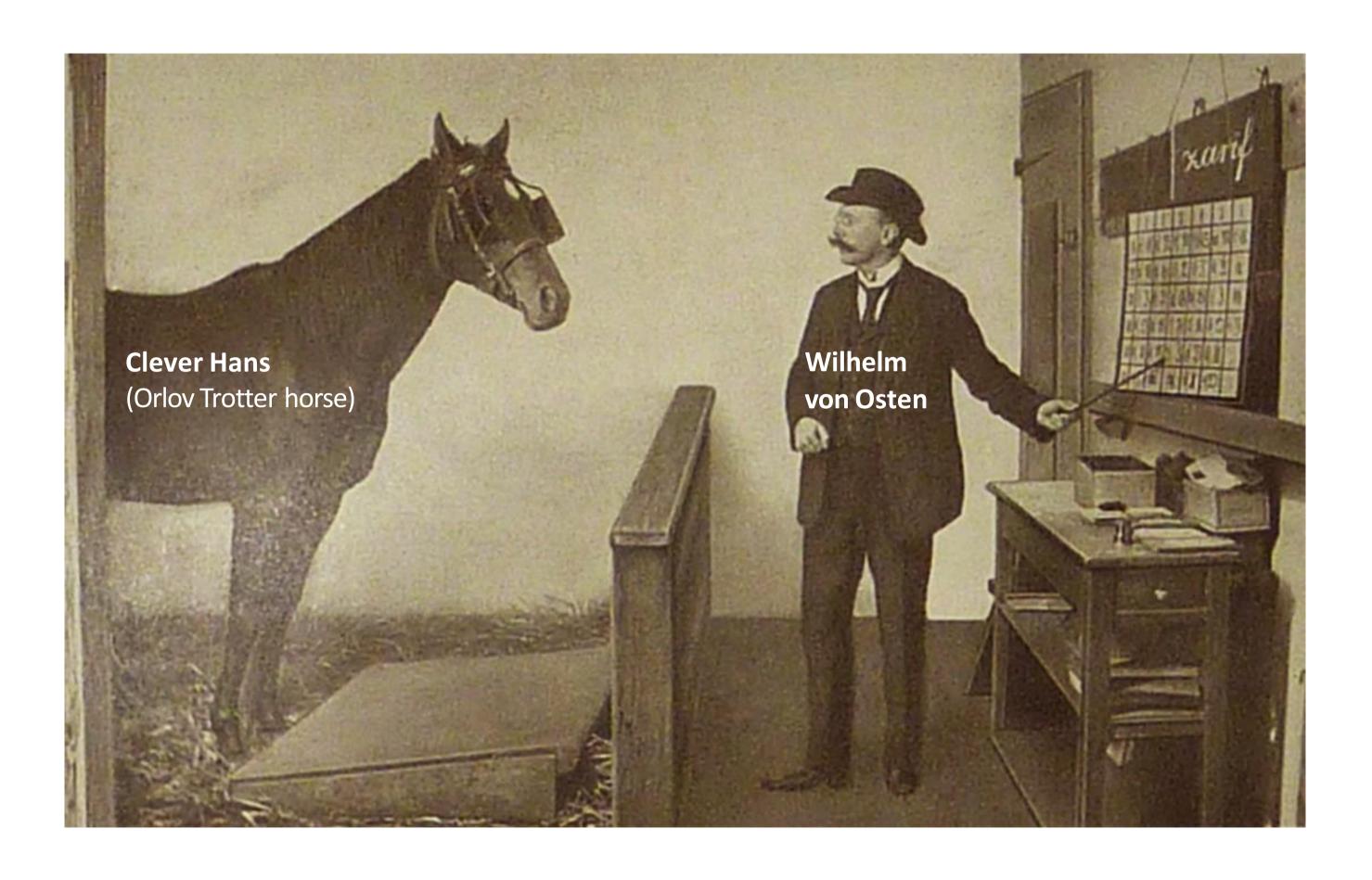
$$I(X, Y) *2$$

# Filtrage Linéaire

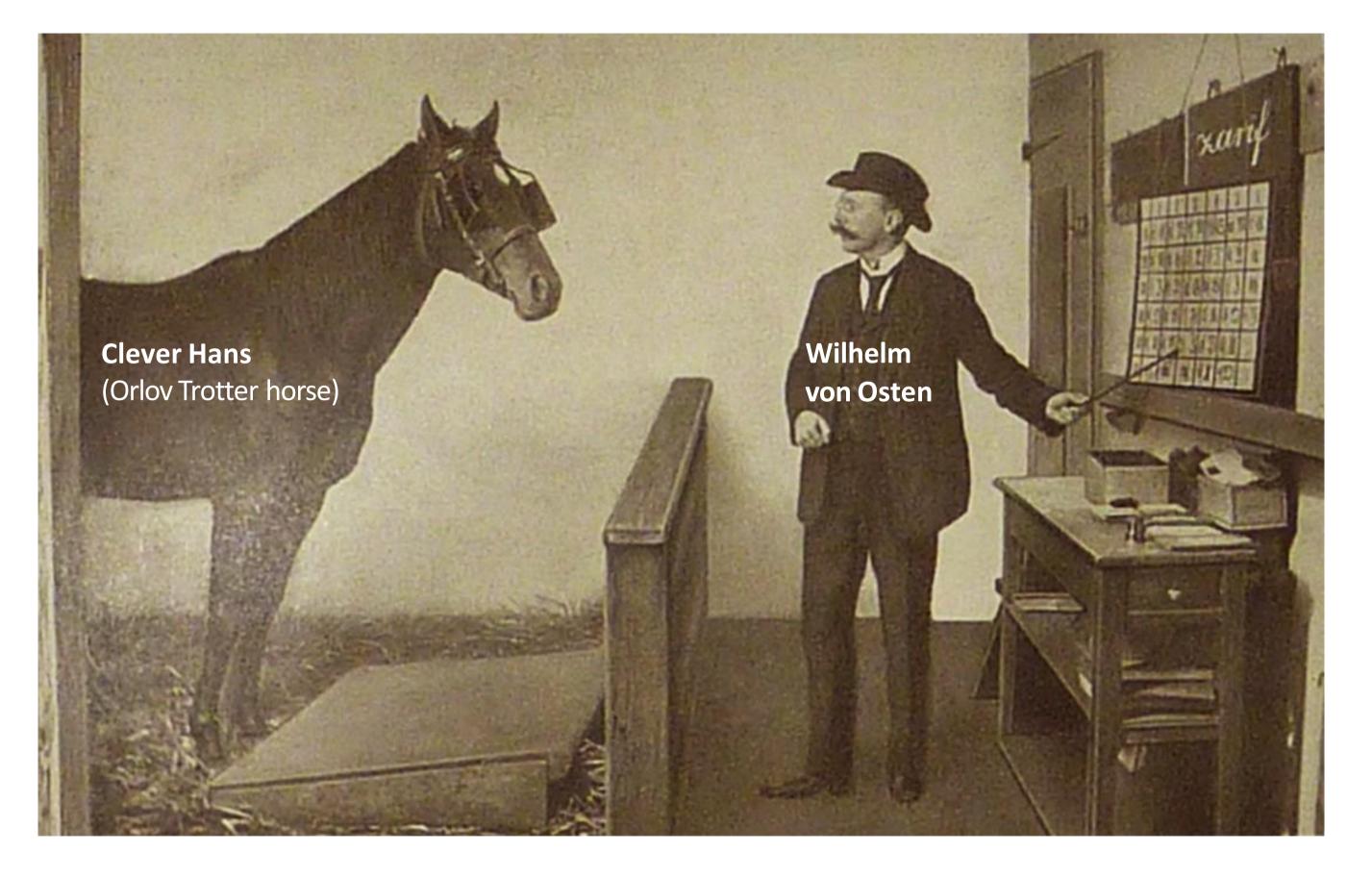




# Exemple 'amusant' du Jour: Clever Hans



#### Exemple 'amusant' du Jour: Clever Hans



Hans peut répondre à 89% des questions de math correctement

#### Exemple 'amusant' du Jour: Clever Hans



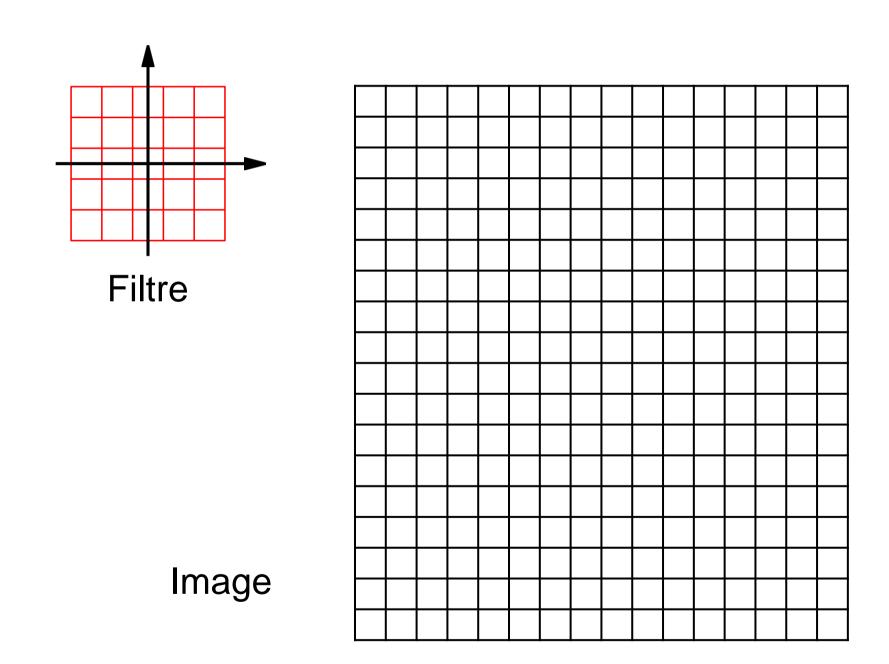
Le cours était intelligent, juste à l'inverse de la façon que pensait van Osten!



#### Filtres Linéaires

Soit I(X, Y) une image numérique  $n \rightarrow n$  (on prend largeur = hauteur)

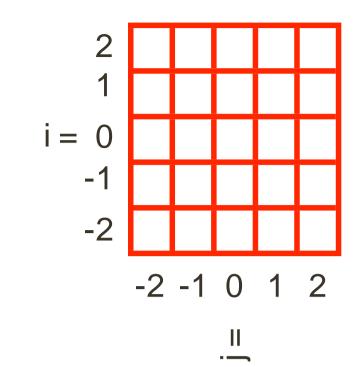
Soit F(X, Y) une autre image  $m \rightarrow m$  (nôtre "filtre" ou "noyau")



On suppose m est impaire. (ici,m = 5)

#### Filtres Linéaires

Soit 
$$k = \frac{m}{2}$$



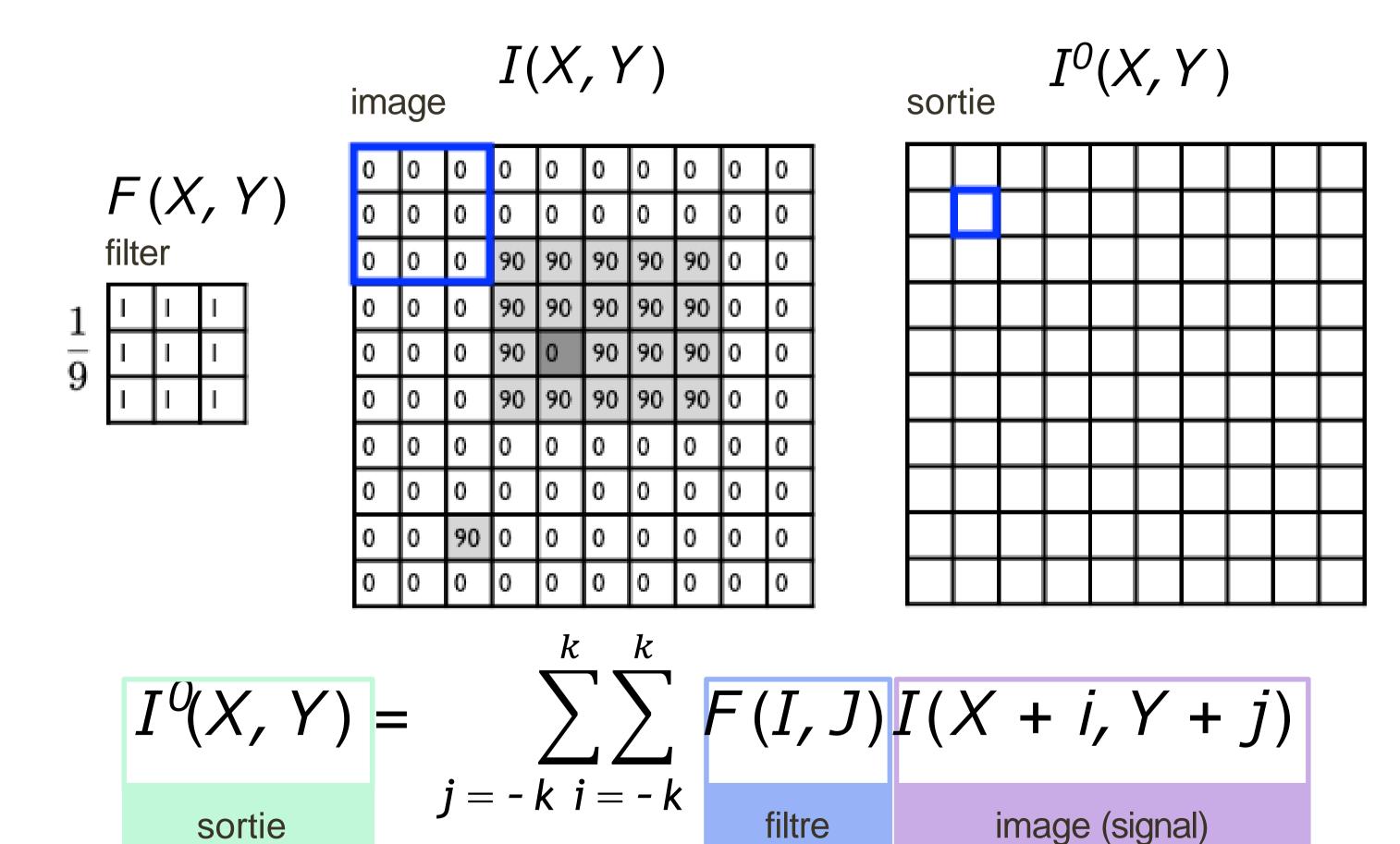
On calcule une nouvelle image,  $I^0(X, Y)$ , comme suit:

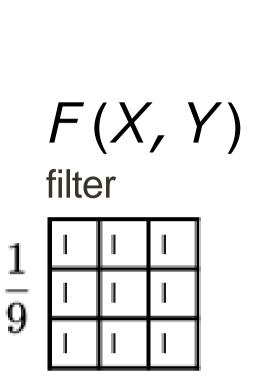
$$I^{O}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

image (signal)

Intuition: chaque pixel dans l'image de sortie est une combinaison linéaire du même pixel et ses pixels voisins dans l'image d'origine

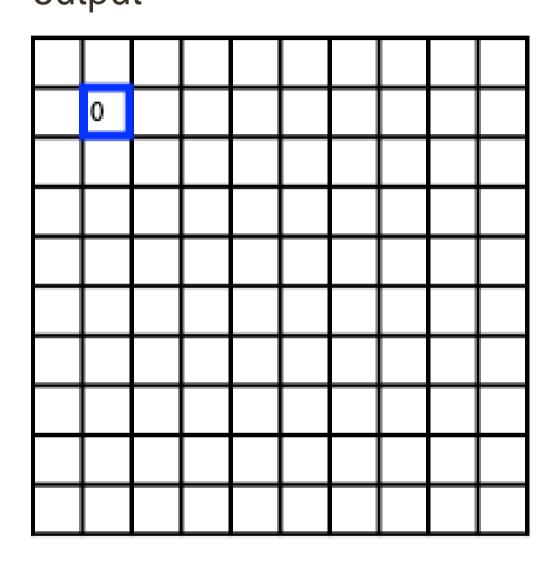




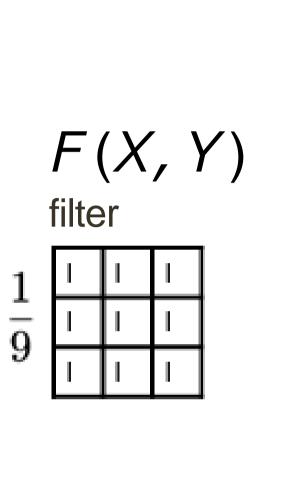
$$I(X,Y)$$
 image

			_		_		_		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

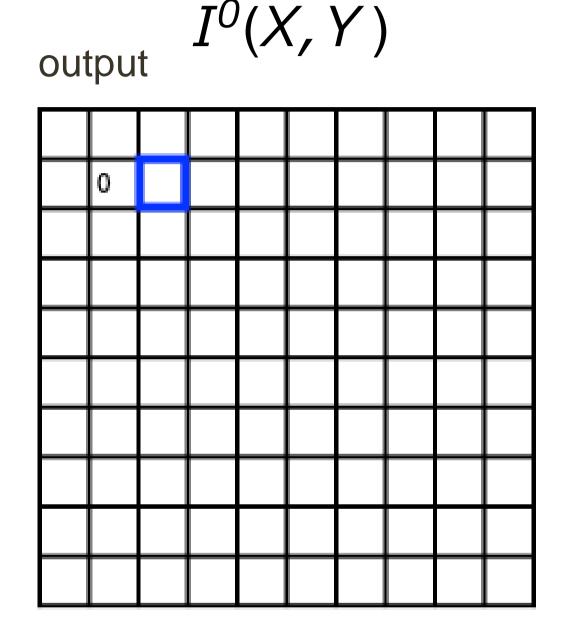
output 
$$I^0(X,Y)$$



$$I^{0}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie
$$j = -k \ i = -k$$
filtre image (signal)



I(X,Y)

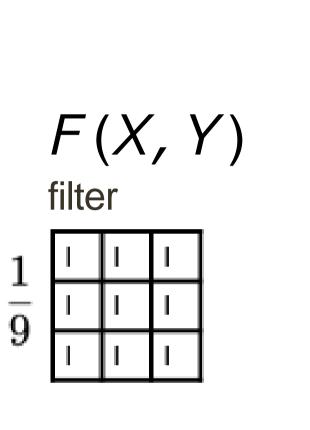


$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre

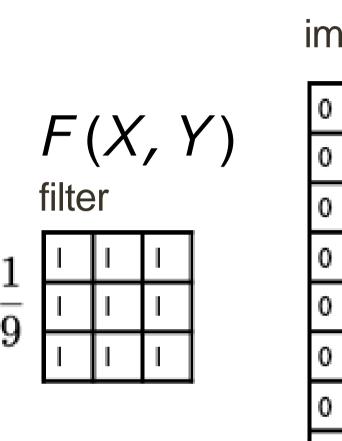
image (signal)

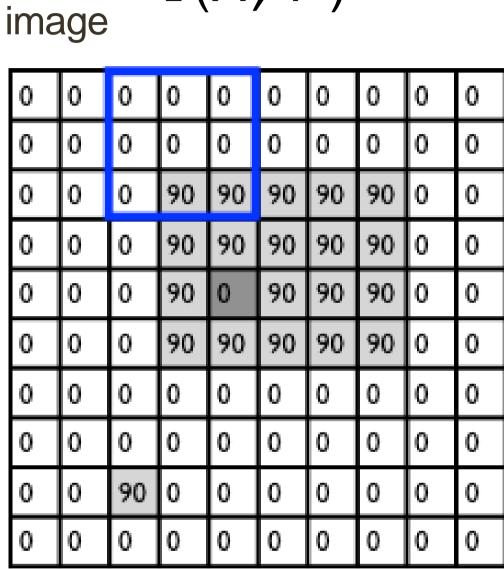


$$I(X,Y)$$
 image  $I(X,Y)$  image  $I(X,$ 

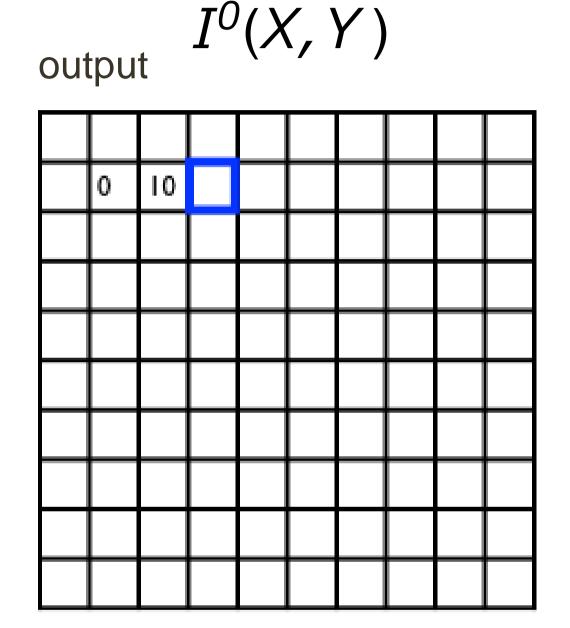
$$I^{O}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie

filtre image (signal)





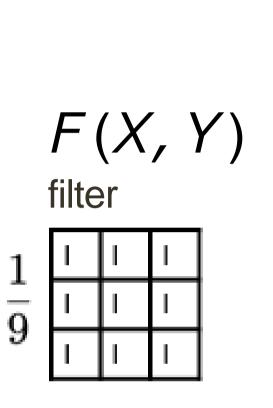
I(X,Y)

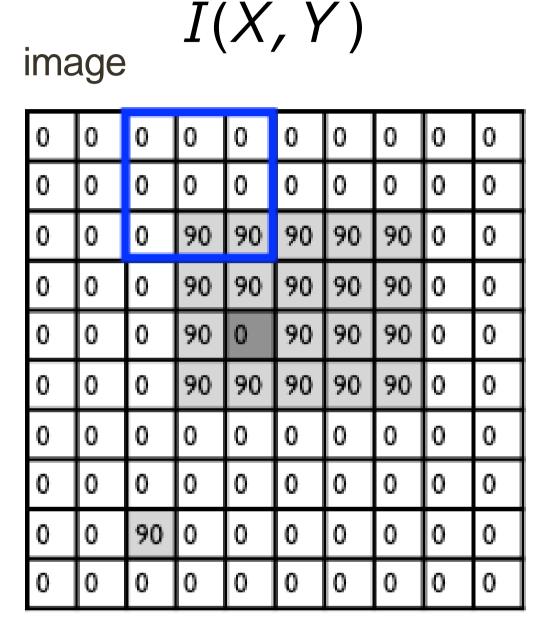


$$I^{O}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

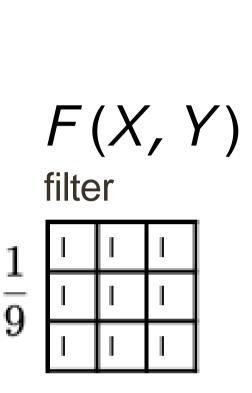
filtre image (signal)

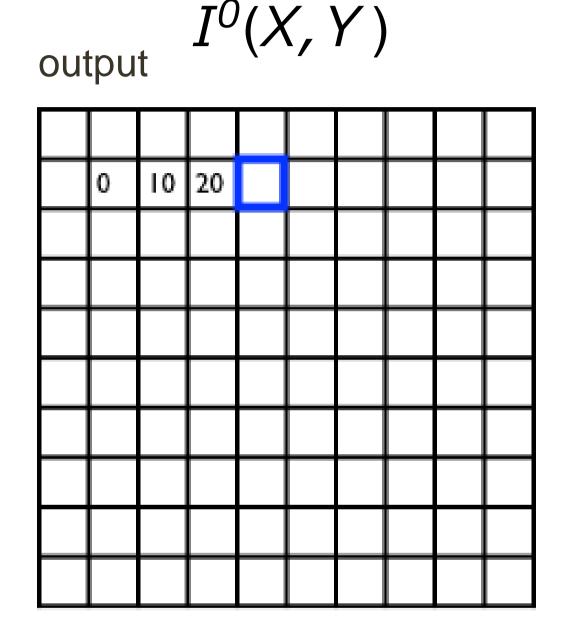




$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

filtre image (signal)



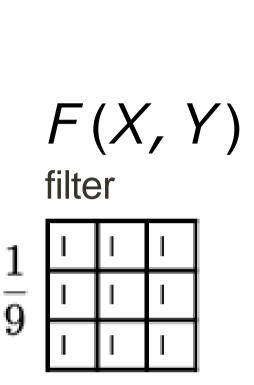


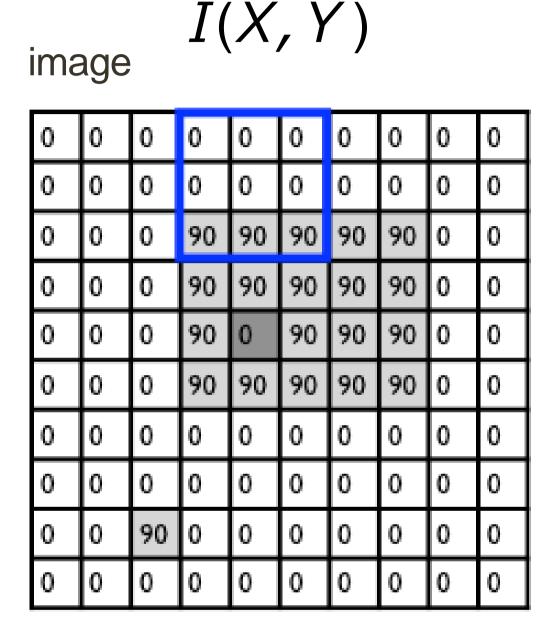
$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre

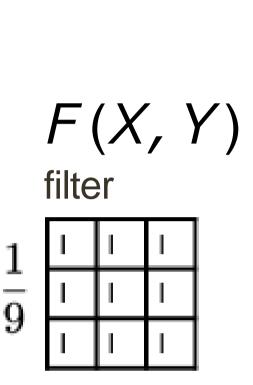
image (signal)

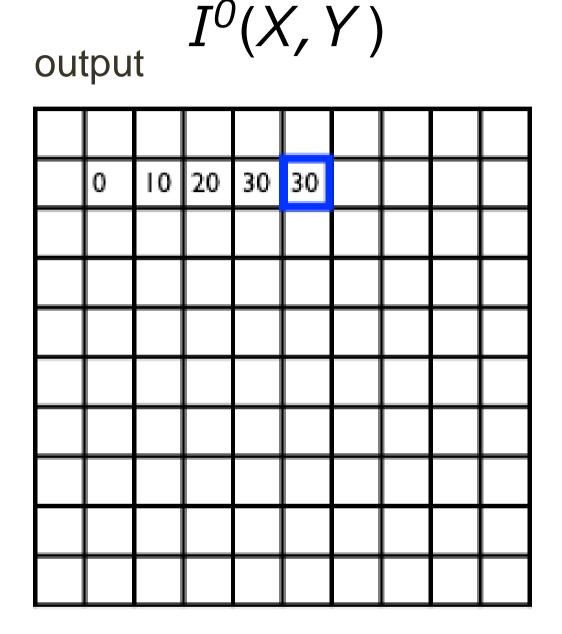




$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

filtre image (signal)



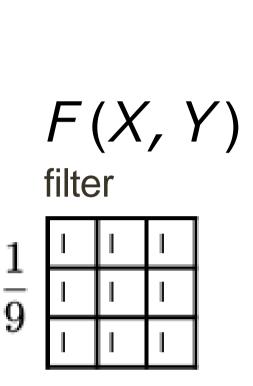


$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

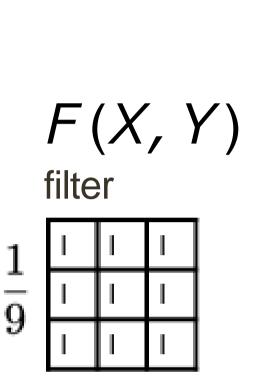
sortie

filtre

image (signal)



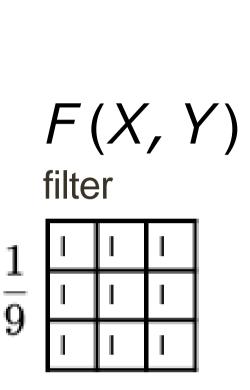
$$I^{0}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie
$$j = -k \ i = -k$$
filtre image (signal)

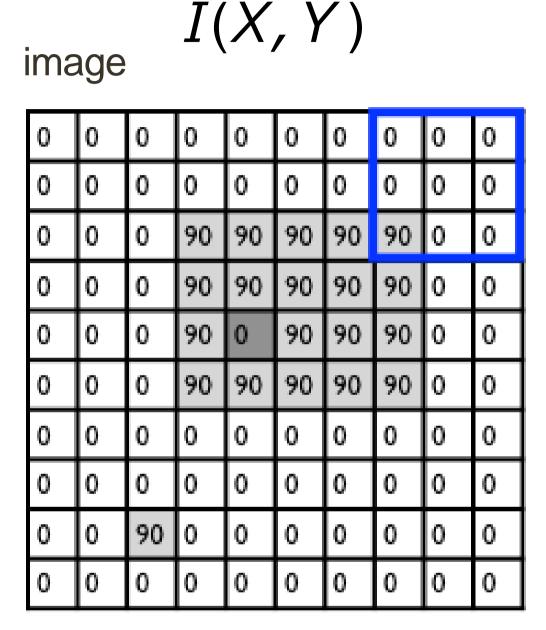


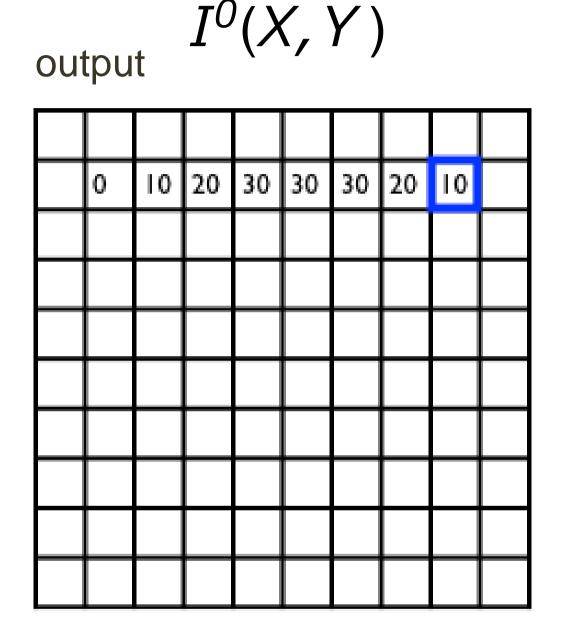
$$I^{O}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

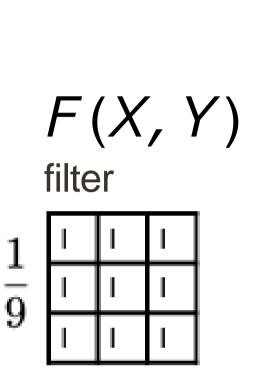
filtre image (signal)







$$I^{0}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie
$$j = -k \ i = -k$$
filtre image (signal)

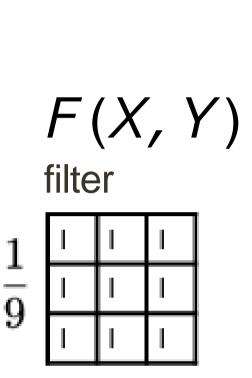


$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre

image (signal)

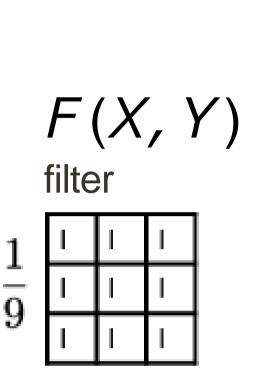


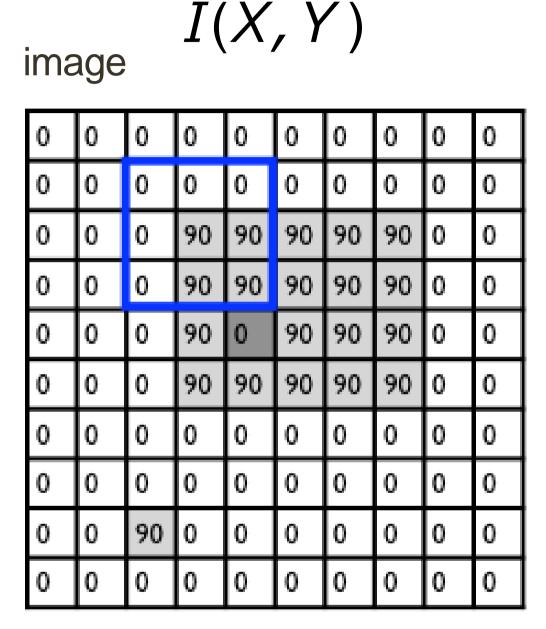
ıma	age	!							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

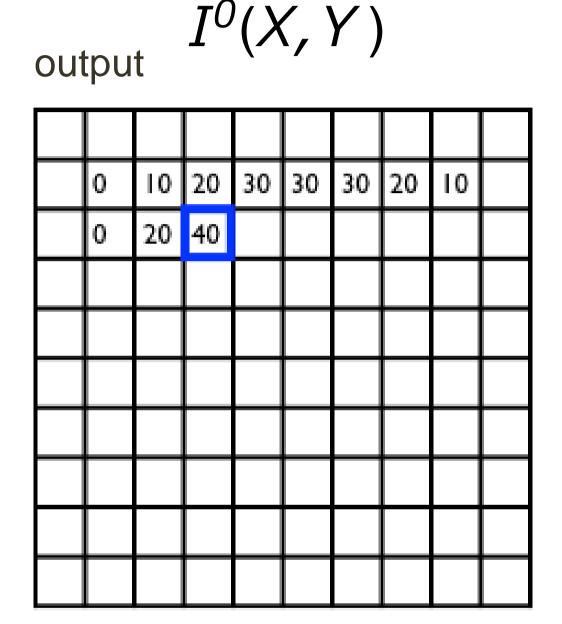
$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

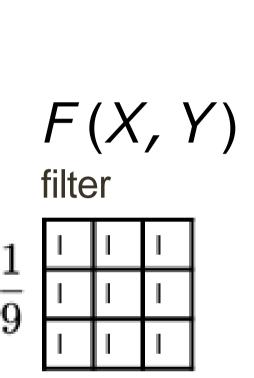
image (signal)

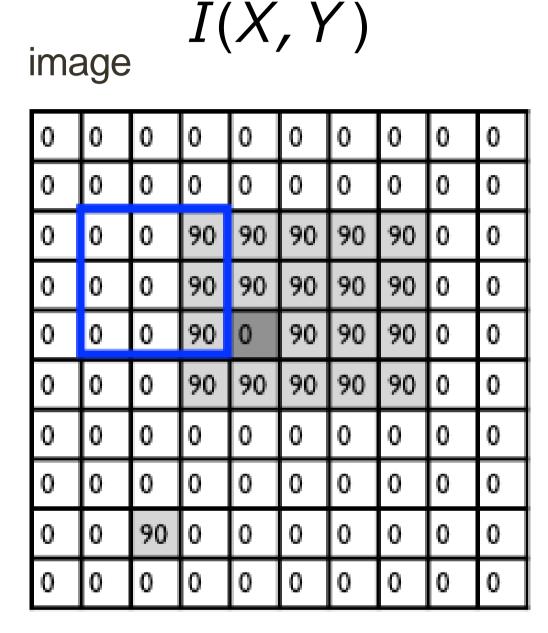


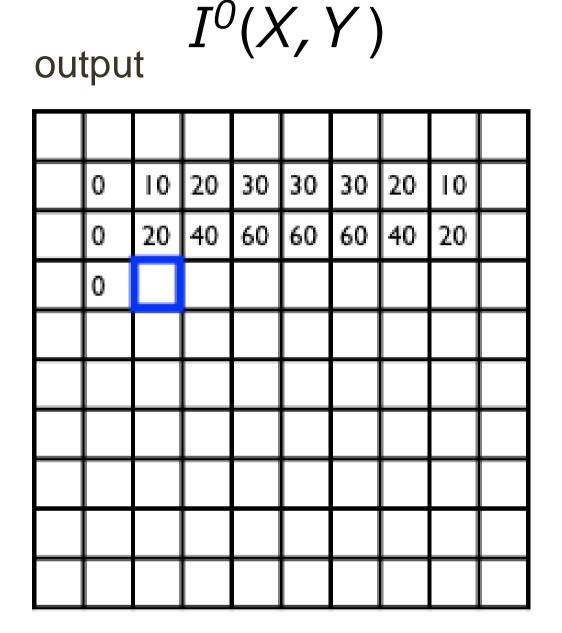




$$I^{0}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie
$$j = -k \ i = -k$$
filtre image (signal)



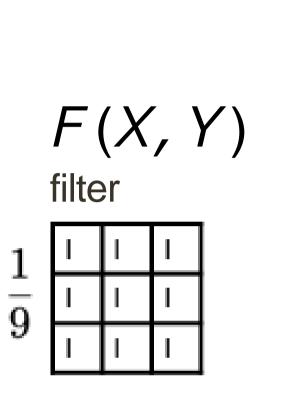


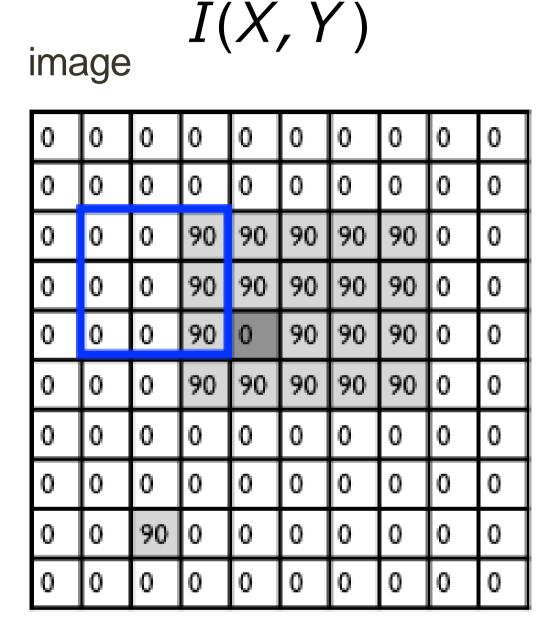


$$I^{O}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre image (signal)



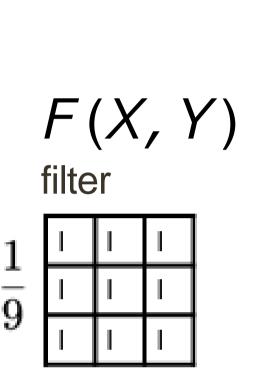


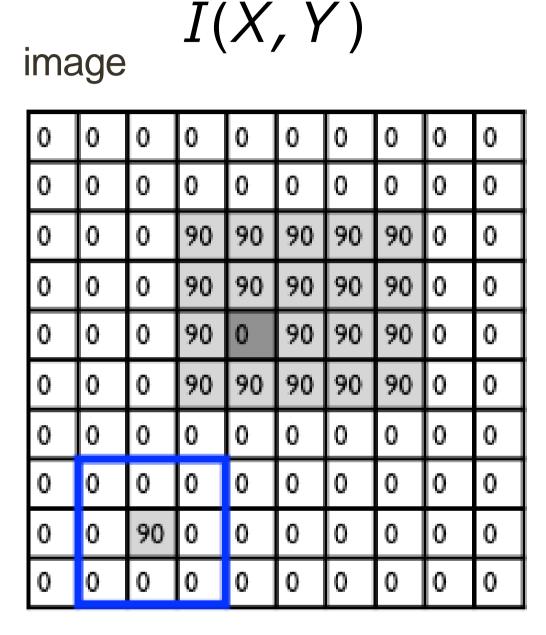
$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre

image (signal)



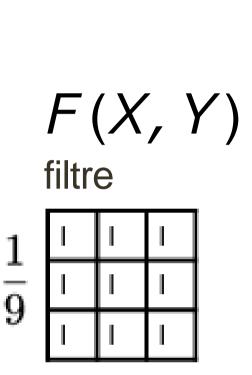


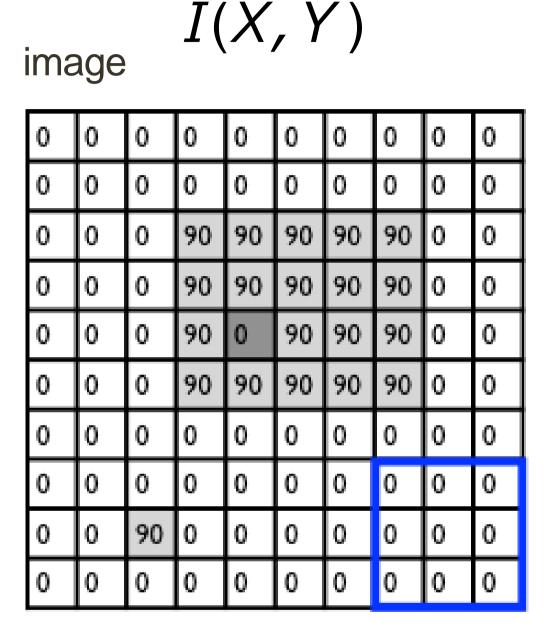
$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

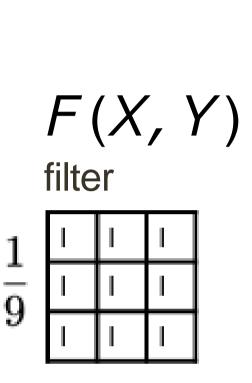
filtre

image (signal)





$$I^{0}(X,Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I,J)I(X+i,Y+j)$$
sortie
$$j = -k \ i = -k$$
filtre image (signal)



$$I^{0}(X, Y) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} F(I, J) I(X + i, Y + j)$$
sortie

sortie

filtre

image (signal)

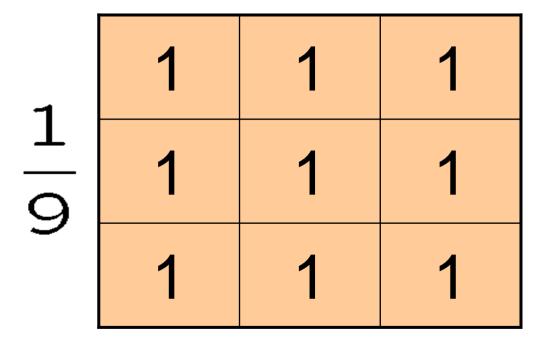
### Motivation: débruitage d'image

Comment peut-on réduire le bruit dans une photo?



### Moyenne mobile

- remplace chaque pixel par une moyenne pondérée de son voisinage
- Les poids sont appelés : noyau du filtre
- Quels sont les poids pour la moyenne d'un voisinage 3x3?



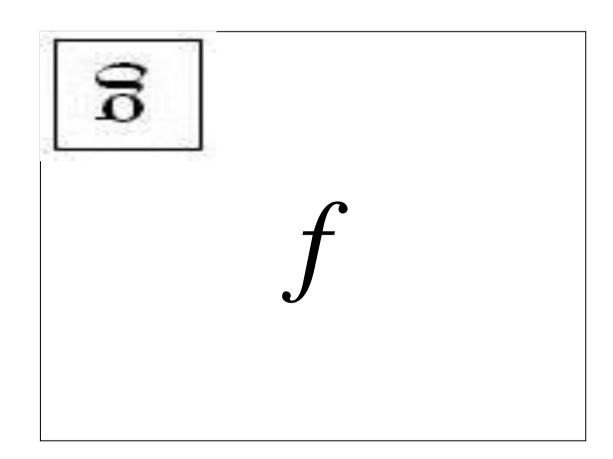
"box filter"

#### Définir la convolution

 Soit f une image et g un noyau. La sortie de f convoluée avec g est notée f \* g.

$$(f * g)[m,n] = \sum_{k,l} f[m-k,n-l]g[k,l]$$

Convention: noyau est "inversée"



MATLAB functions: conv2, filter2, imfilter

### Principales propriétés

- Linéarité: filter $(f_1 + f_2)$  = filter $(f_1)$  + filter $(f_2)$
- Invariance spatiale: ne dépend pas de la position du pixel : filter(shift(f)) = shift(filter(f))
- Résultat théorique : tout opérateur linéaire invariant peut être représentée par une convolution

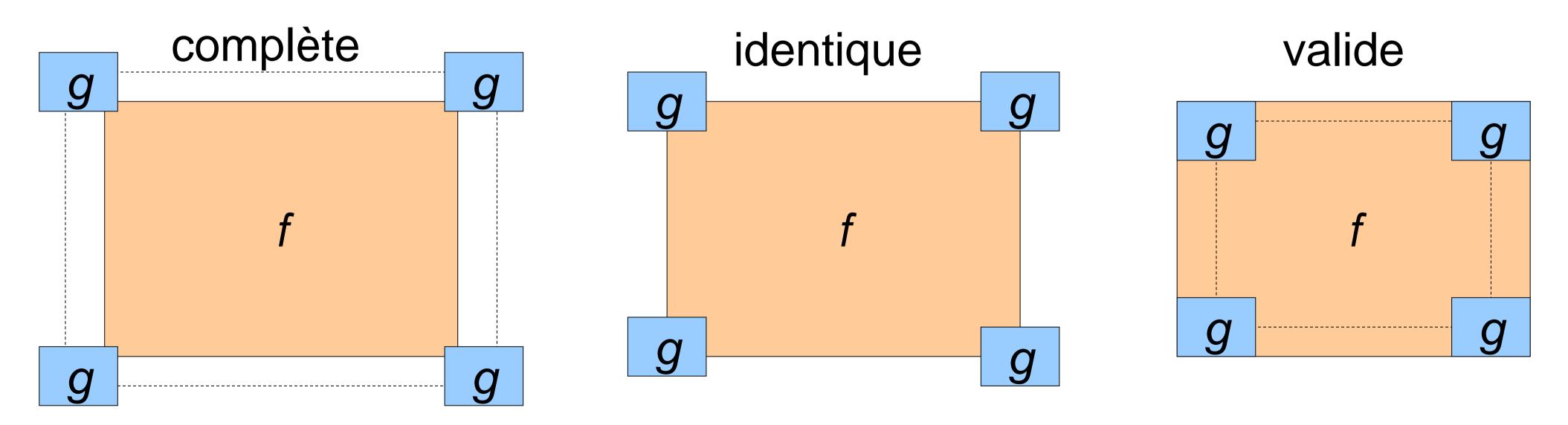
### Propriétés

- Commutative: a \* b = b \* a
  - Pas de différence entre le filtre et le signal du point de vue concept
- Associative:  $a^*(b^*c) = (a^*b)^*c$ 
  - Souvent plusieurs filtres appliqués l'un après l'autre: (((a \* b<sub>1</sub>) \* b<sub>2</sub>) \* b<sub>3</sub>)
  - Ceci équivalent à appliquer un seul filtre: a \* (b<sub>1</sub> \* b<sub>2</sub> \* b<sub>3</sub>)
- Distributive avec addition:  $a^*(b+c) = (a^*b) + (a^*c)$
- Multiplication par Scalaires : ka \* b = a \* kb = k (a \* b)
- Identité: impulsion de Dirac e = [..., 0, 0, 1, 0, 0, ...]
   a \* e = a

### Détails de l'effet de bord

### Quelle est la taille de l'image de sortie?

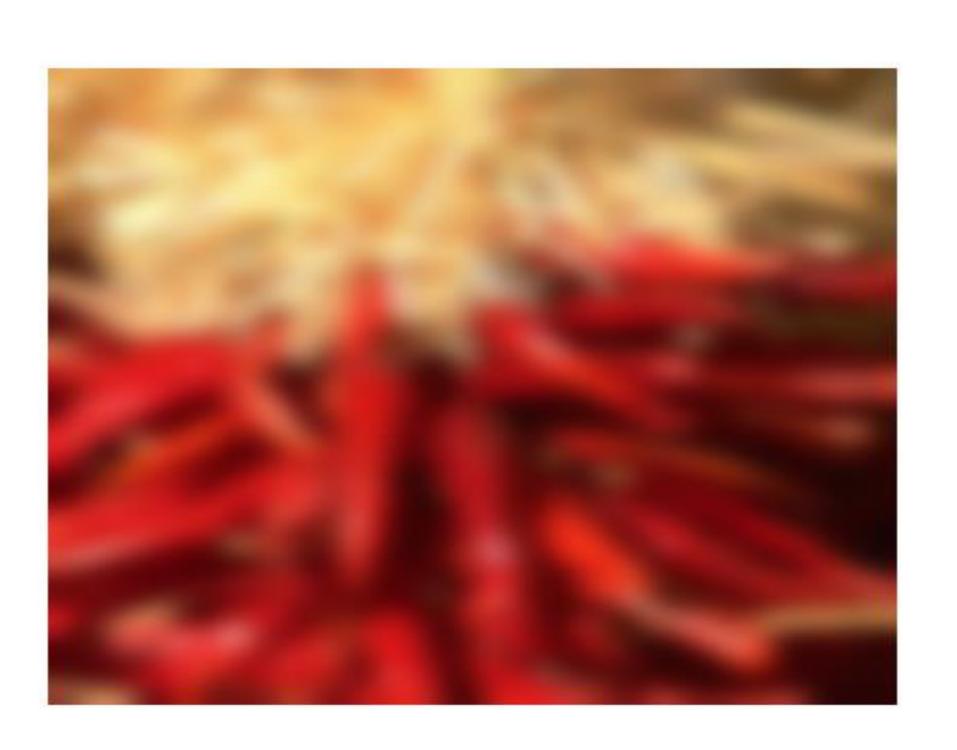
- MATLAB: filter2(g, f, shape)
  - shape = 'full': output size is sum of sizes of f and g
  - shape = 'same': output size is same as f
  - shape = 'valid': output size is difference of sizes of f and g



### Détails Ennuyeux

#### Les éffets de bordure?

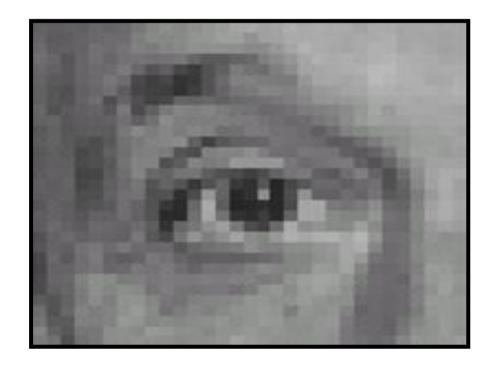
- La fenêtre du filtre dépasse le bord de l'image
- besoin d'extrapoler
- méthodes:
  - couper les bords (clip filter)
  - replier les deux bords
  - copier le bord
  - réflexion du bord



### Effets de bord sous Matlab

#### Les effets de bord?

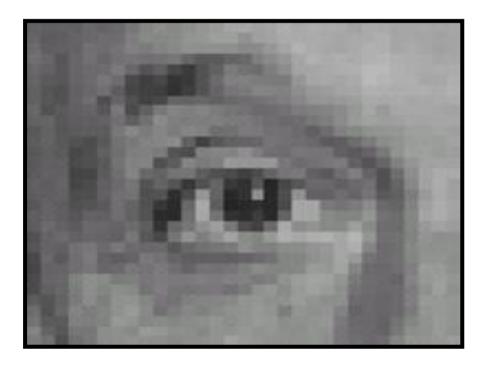
- La fenêtre du filtre dépasse le bord de l'image
- besoin d'extrapoler
- méthodes:
  - clip filter (black): imfilter(f, g, 0)
  - replier les deux bords: imfilter(f, g, 'circular')
  - copier le bord: imfilter(f, g, 'replicate')
  - réflexion du bord: imfilter(f, g, 'symmetric')



Originale

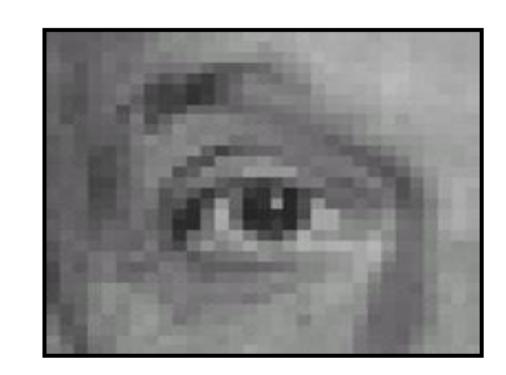
0	0	0
0	1	0
0	0	0



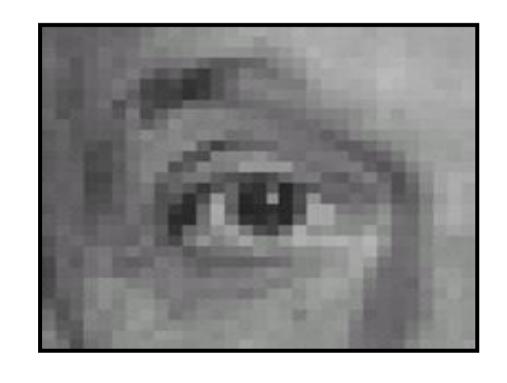


Originale

0	0	0
0	1	0
0	0	0



Filtrée (pas de changement)



Originale

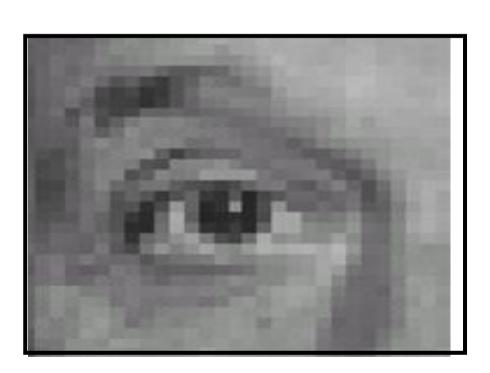
0	0	0
0	0	1
0	0	0



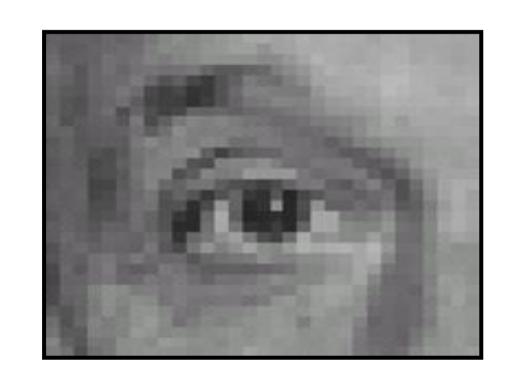


Originale

0	0	0
0	0	1
0	0	0



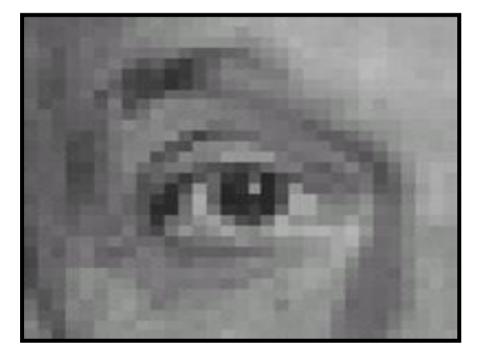
Décalée vers la gauche par 1 pixel



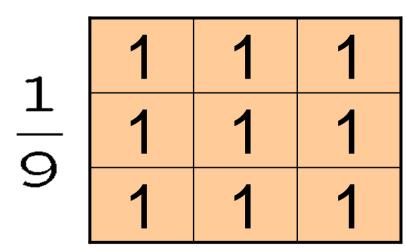
Originale

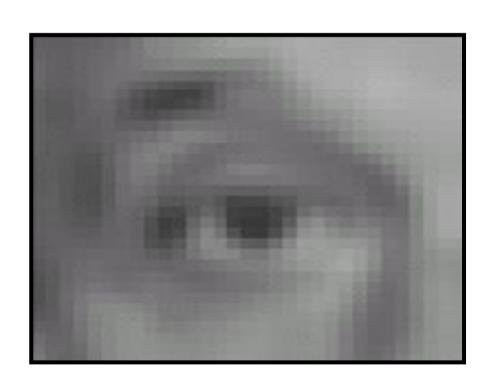
1	1	1	1
<u></u>	1	1	1
9	1	1	1



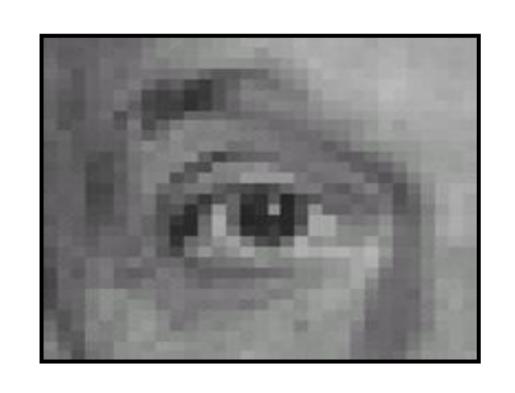


Originale





Floue (avec un box filtre)



Originale

0	0	0	1	1	1	1
0	2	0	<u> </u>	1	1	1
0	0	0	9	1	1	1

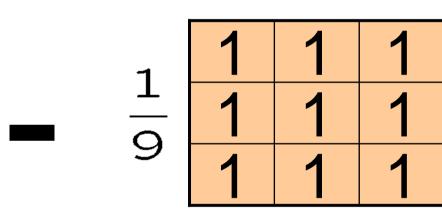
(Noter que la somme des poids vaut 1)





Originale

0	0	0
0	2	0
0	0	0

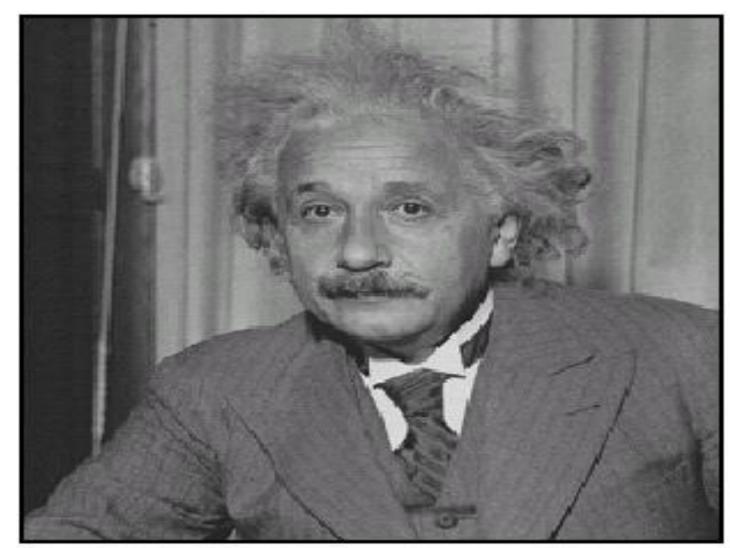




#### Filtre d'accentuation

- Accentuer les différences avec la moyenne locale

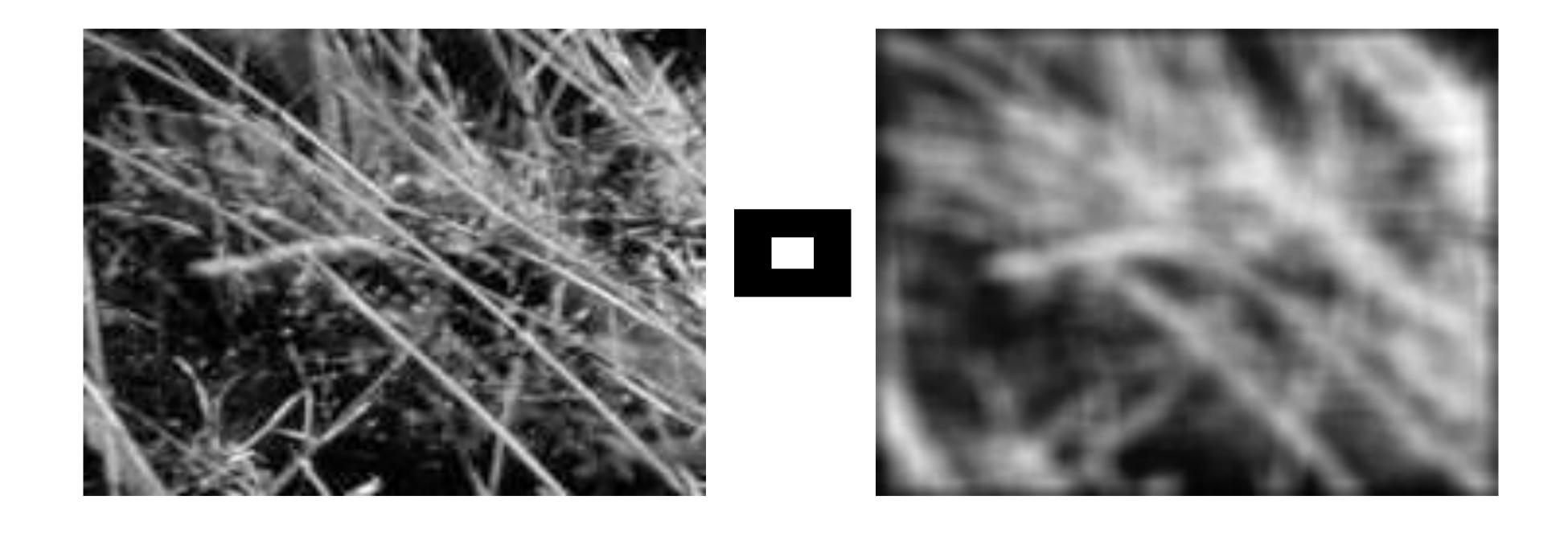
# Accentuation (Sharpening)





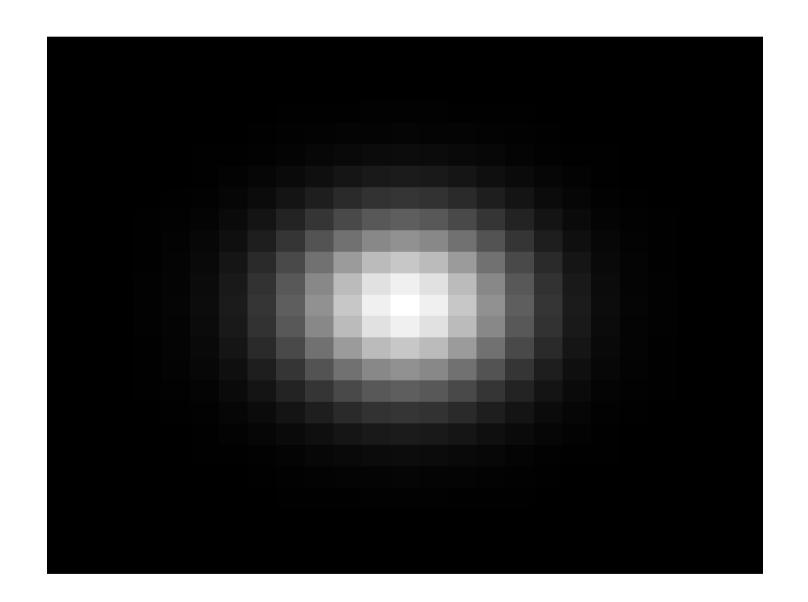
### Lissage avec le filtre boite (box filter)

- Effet de bord dans cette photo?
- Quelle est la solution?



### Lissage avec le filtre boite (box filter)

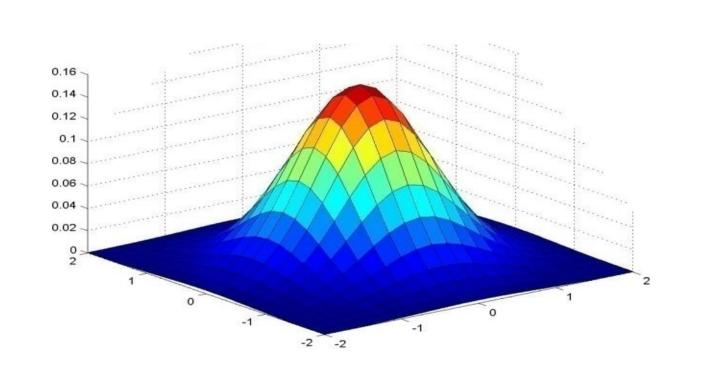
 Pour éliminer les effets du bord, pondérer la contribution des pixels voisins selon leur approximité du pixel central

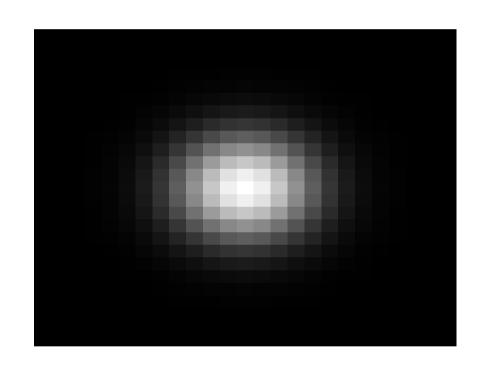


"bosse flou"

### Filtre ou Noyau Gaussien

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$





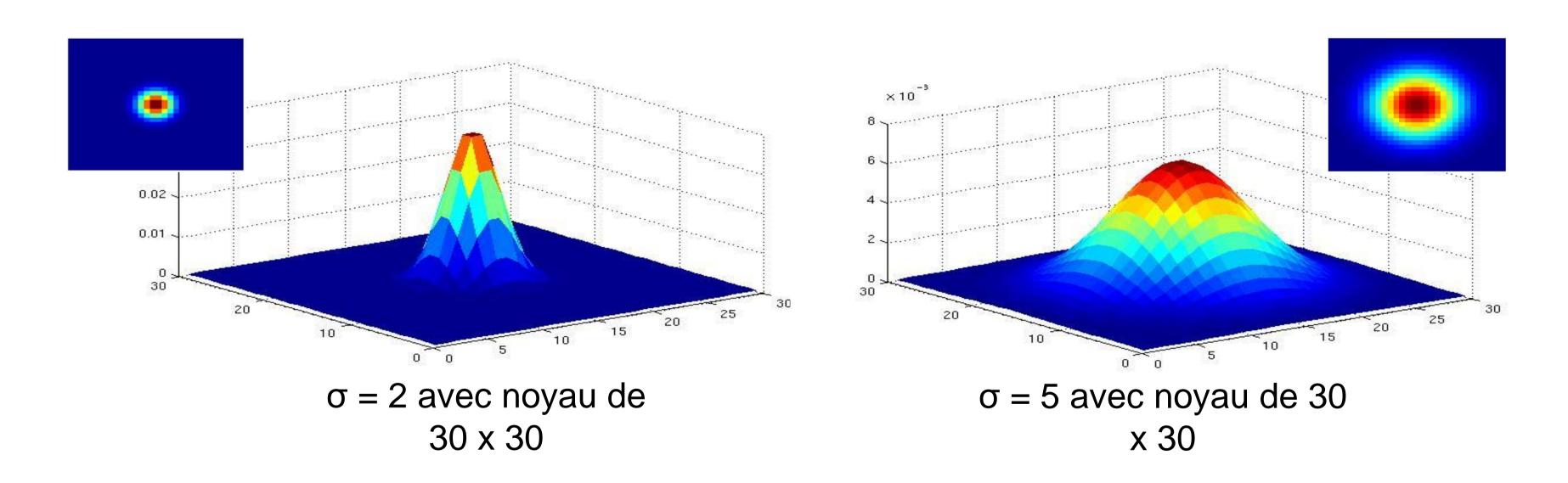
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.022	0.097	0.159	0.097	0.022
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003

 $5 \times 5$ ,  $\sigma = 1$ 

 Facteur constant fait que le volume vaut 1 (à ignorer lors du calcul des valeurs du filtre, puisque il faut renormaliser les poids de façon que leur somme vaut 1)

### Filtre ou Noyau Gaussien

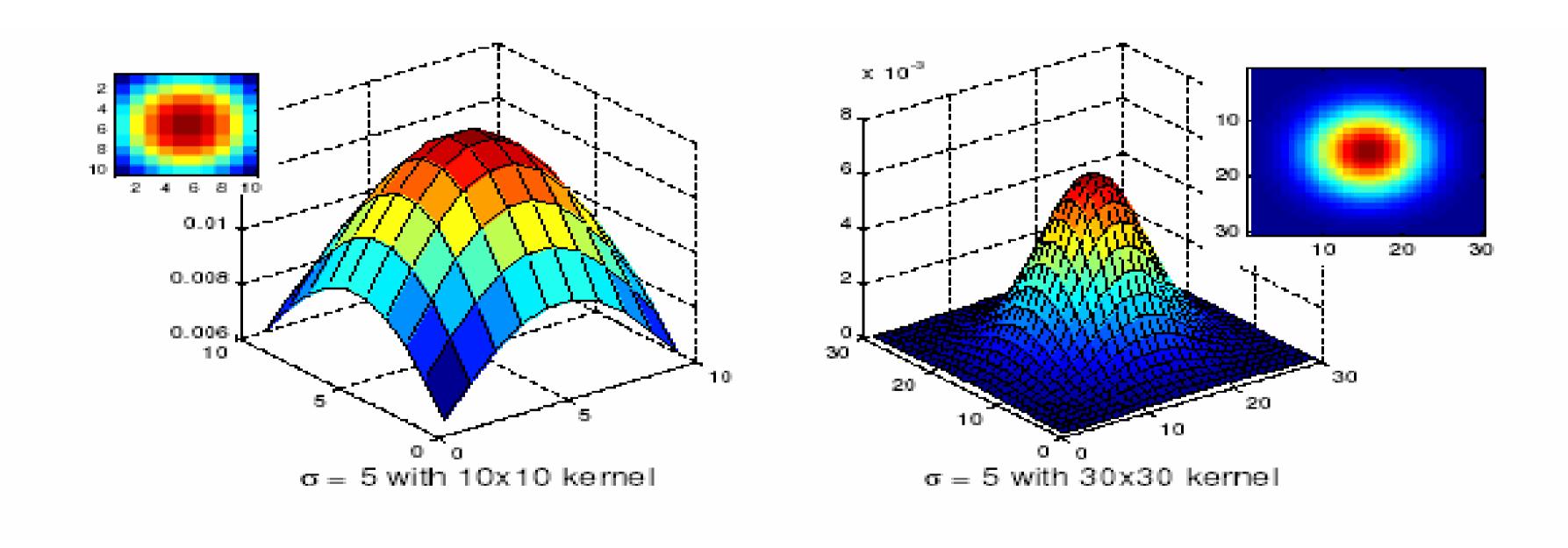
$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^{2}} e^{-\frac{(x^{2}+y^{2})}{2\sigma^{2}}}$$



Ecart-type σ: determine l'étendue du lissage

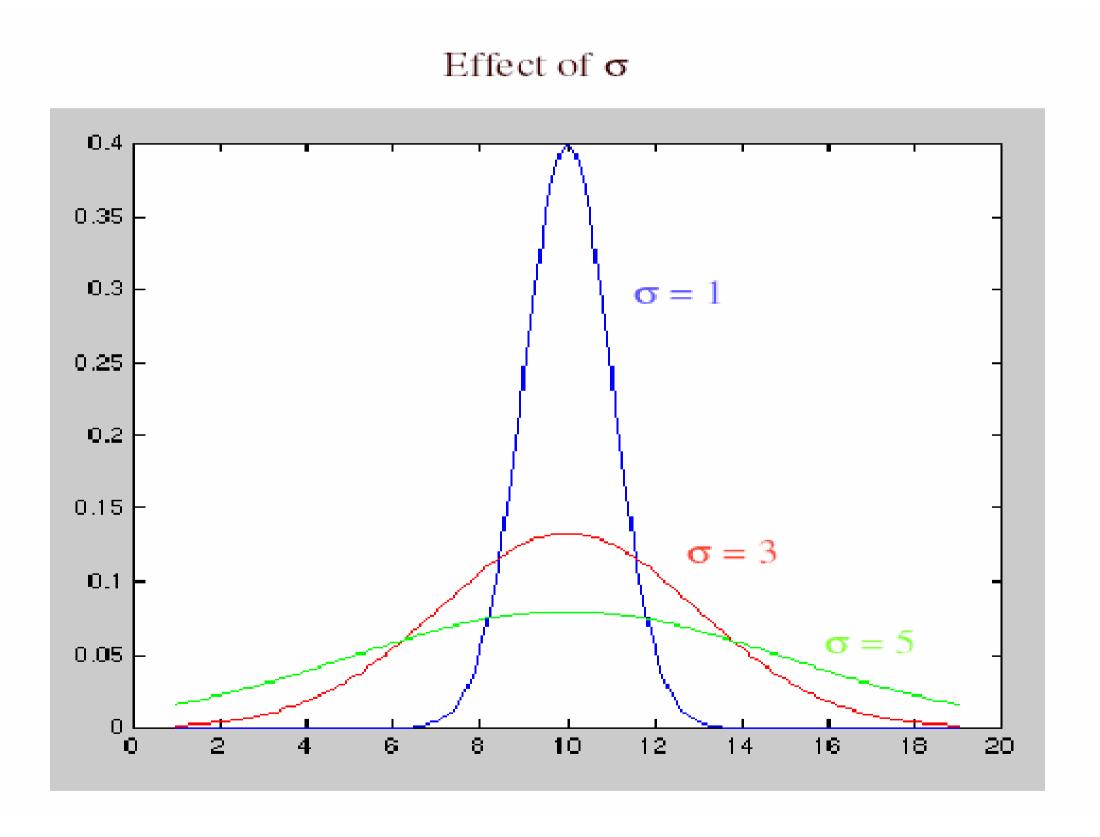
### Choix de la taille du noyau

 La fonction Gaussienne est à support infini, mais les filtres discrets utilise des noyaux finis

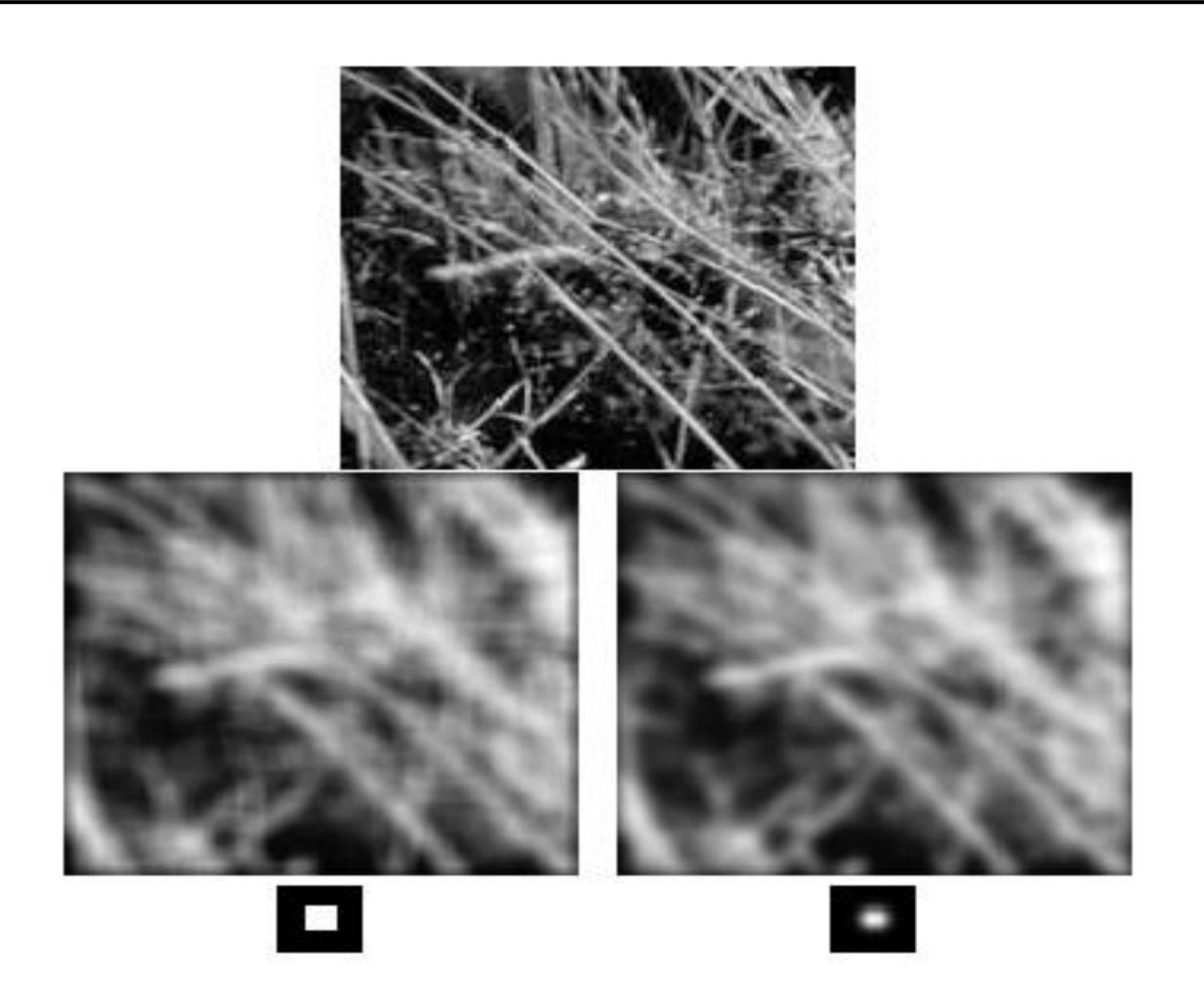


### Choix de la taille du noyau

• Régle: mettre la demi-largeur du filtre égale à  $3\sigma$ 



# Gaussien vs. filtrage par 'box'



#### Filtres Gaussiens

- Elimine les composantes "hautes-fréquences" de l'image (filtre passe-bas)
- Convoluer avec lui-même est un autre Gaussien
  - Ainsi on peut lisser avec des noyaux à petit- $\sigma$ , répéter, et obtenir le même résultat d'un noyau à large- $\sigma$ ,
  - Convoluer 2 fois avec un noyau Gaussien avec ecart-type.  $\sigma$  est équivalent à convoluer avec 1 noyau avec ecart-type  $\sigma\sqrt{2}$
- Noyau Separable : Equivalent à un produit de 2 Gaussiens 1D

### Séparabilité du filtre Gaussien

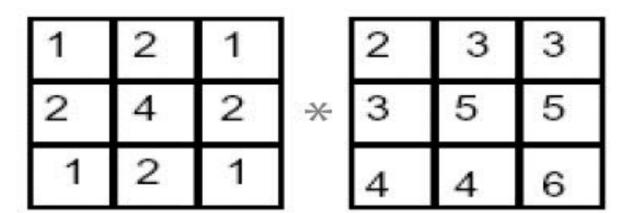
$$G_{\sigma}(x,y) = rac{1}{2\pi\sigma^2} \exp^{-rac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(rac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-rac{x^2}{2\sigma^2}}
ight) \left(rac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-rac{y^2}{2\sigma^2}}
ight)$$

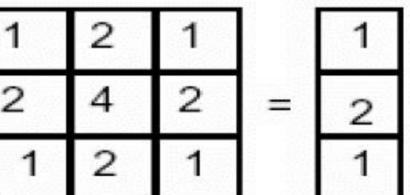
Gaussien 2D est exprimé sous forme de produit de 2 Gaussiens 1D, une fonction de x et l'autre de y

### Exemple de Séparabilité

convolution 2D (pixel central)

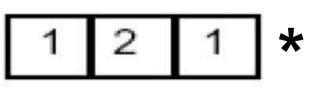


Le filtre factorisé en produit de filters 1D:



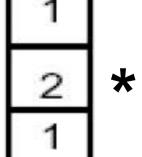
x 1 2 1

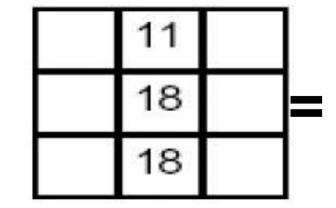
Appliquer convolution suivant les lignes:



3 5 5 <b>=</b> 18	2	3	3		3	11	
4 4 6 18	3	5	5	<b> </b> =		18	
4 4 6	4	4	6			18	

suivi par une convolution selon la colonne:





2		
	65	
	***	

### Pourquoi la séparabilité est utile?

- Quelle est la compléxité pour filtrer une image n×n avec un noyau m×m?
  - $O(n^2 m^2)$
  - Par contre si le noyau est séparable?
    - O(n<sup>2</sup> m)

#### Bruit



Original



Impulse noise



Salt and pepper noise

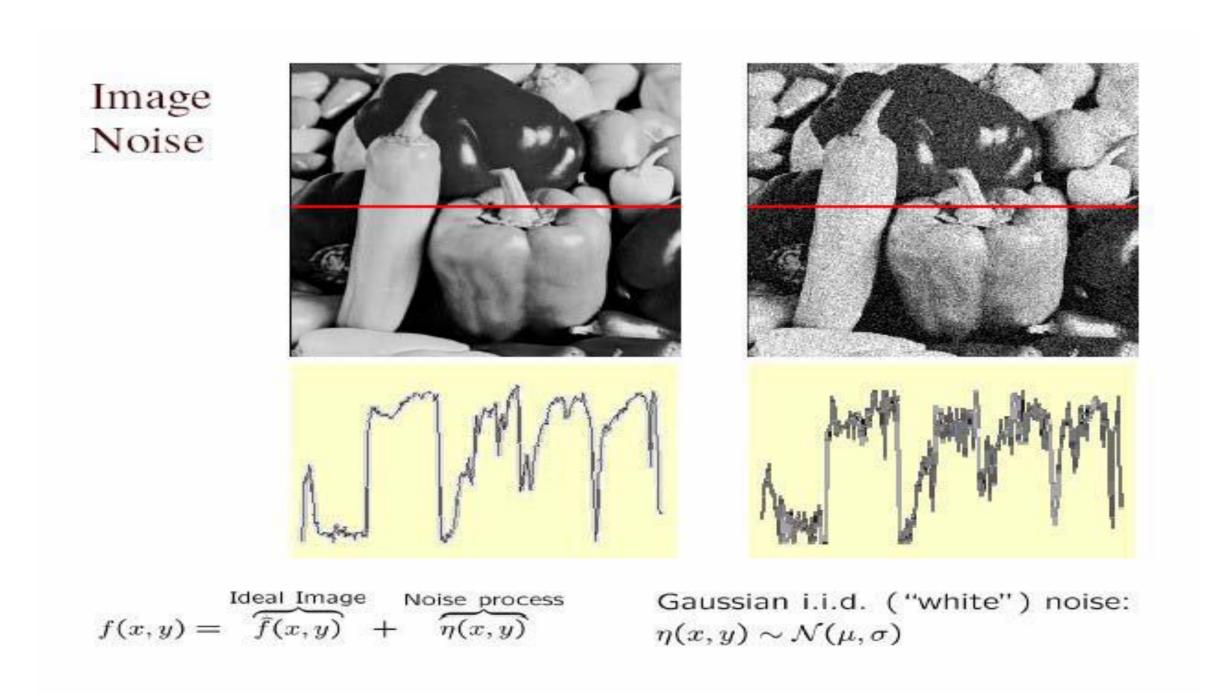


Gaussian noise

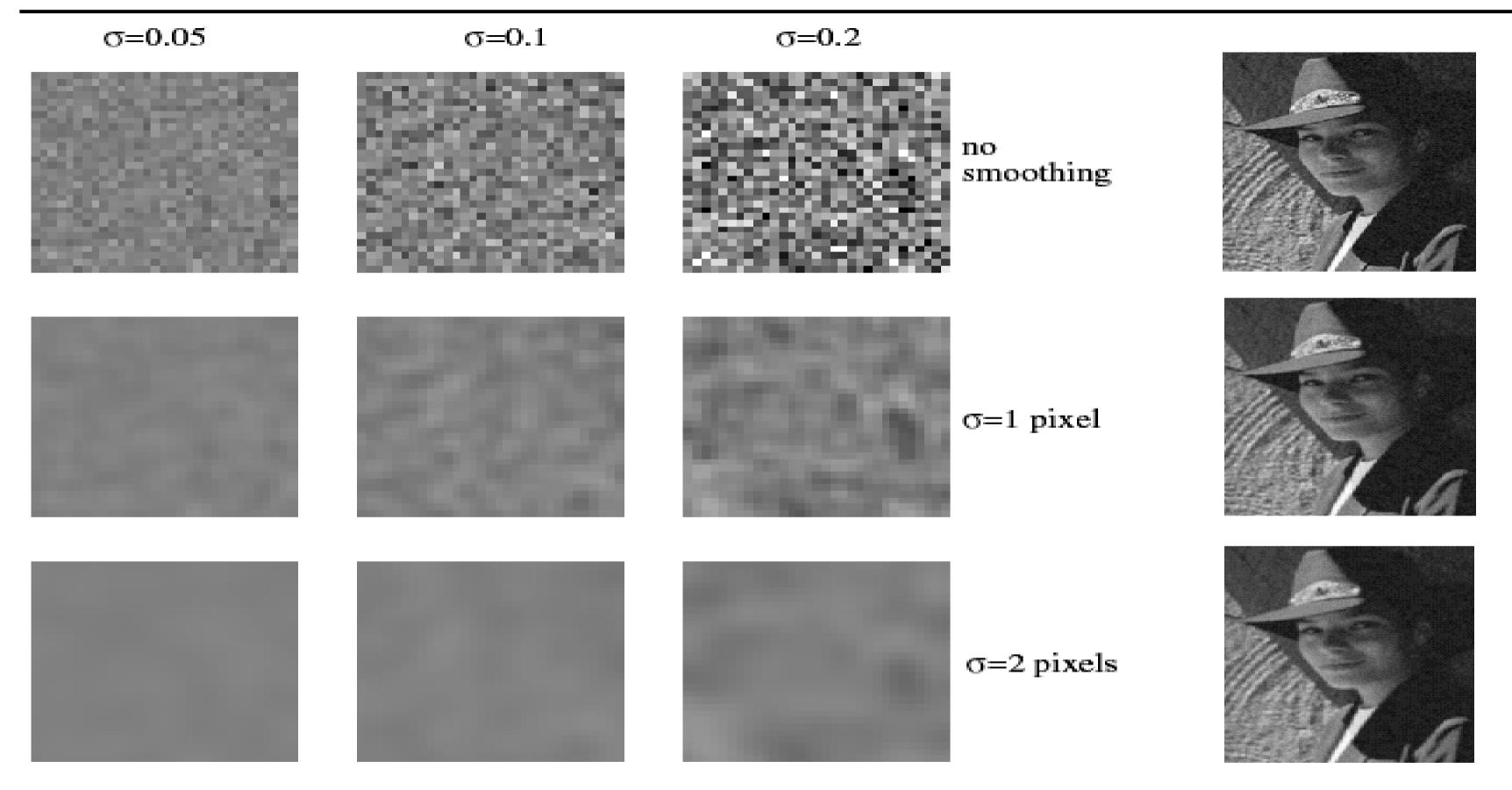
- Bruit Salt and pepper: contient des pixels blancs et noirs
- Bruit Impulsion: contient des pixels blancs aléatoires
- Bruit Gaussien: variations de l'intensité selon une distribution Gaussienne normale

#### Bruit Gaussien

- Modèle Mathématique : somme de plusieurs facteurs indépendants
- Bon pour des écart-types faibles
- Hypothèse: indépendant, bruit moyenne nulle

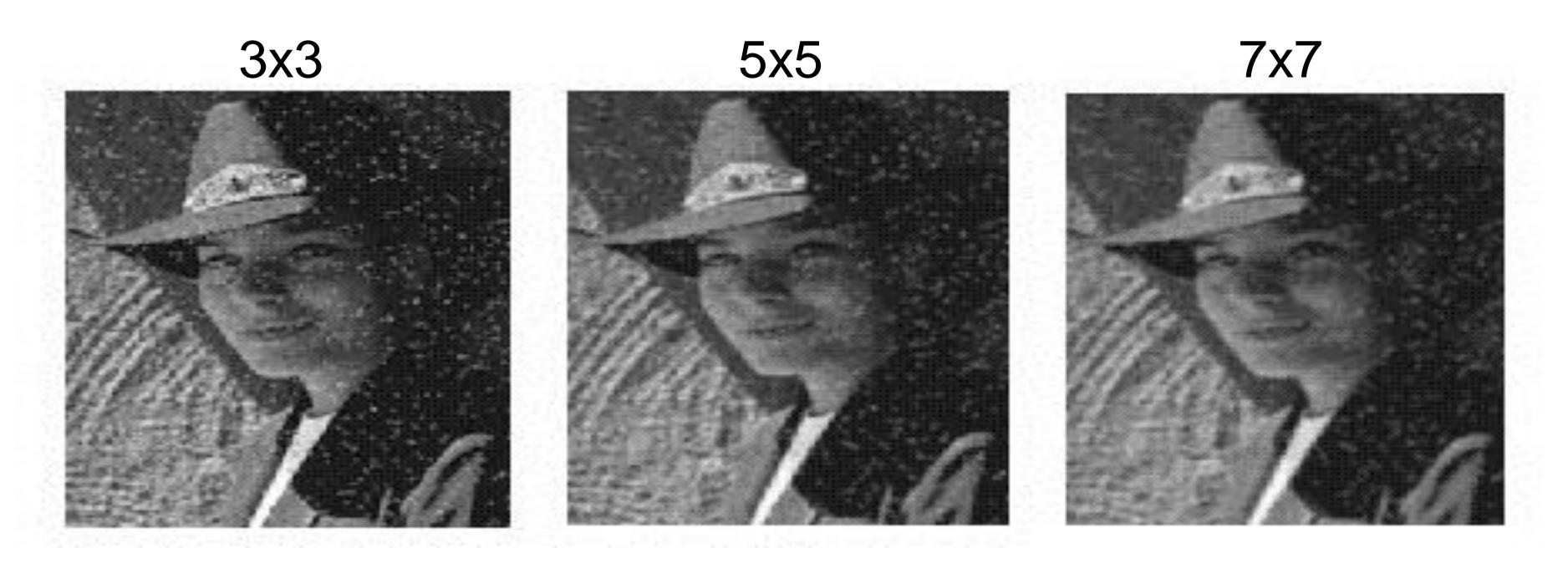


#### Réduire le bruit Gaussien



Lissage avec des écart-types plus larges supprime le bruit, mais aussi rend l'image plus floue

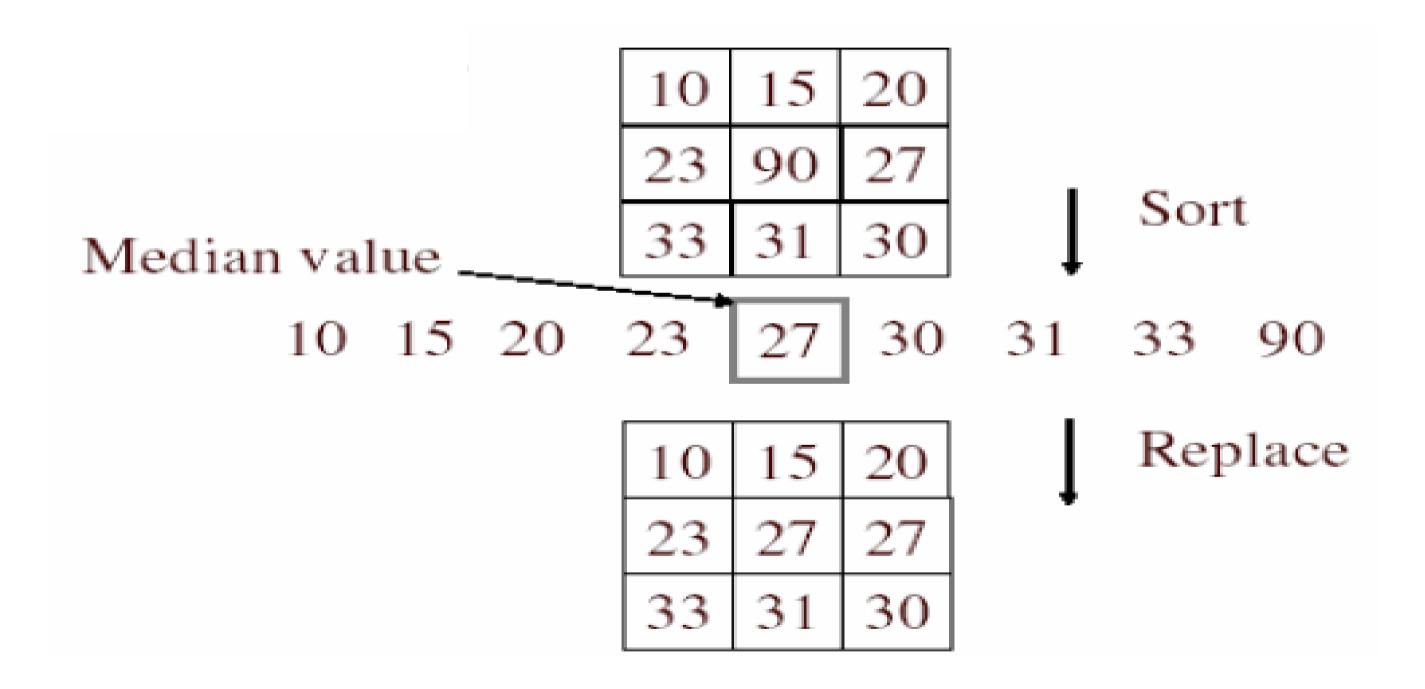
### Réduire le bruit salt-and-pepper



Comparer les résultats?

### Une solution alternative : filtrage Médian

 Un filtre median opère sur une fenêtre en selectionant l'intensité médiane dans la fenêtre



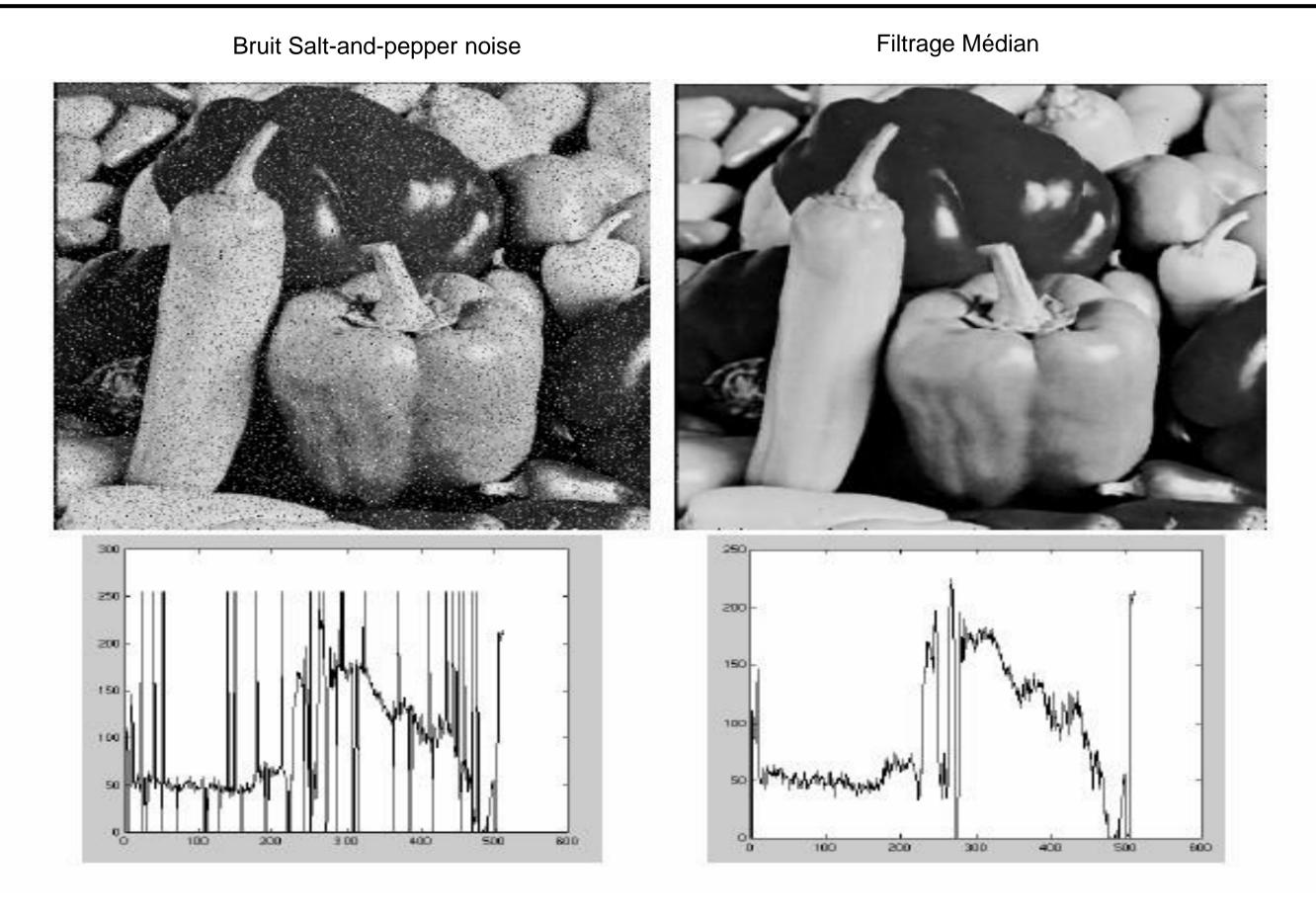
le filtre médian est-il linéaire?

#### Filtre Médian

- Quel est l'advantage du filtrage médian sur le filtrage Gaussian ?
  - Robustesse au bruit d'impulsion (outliers)

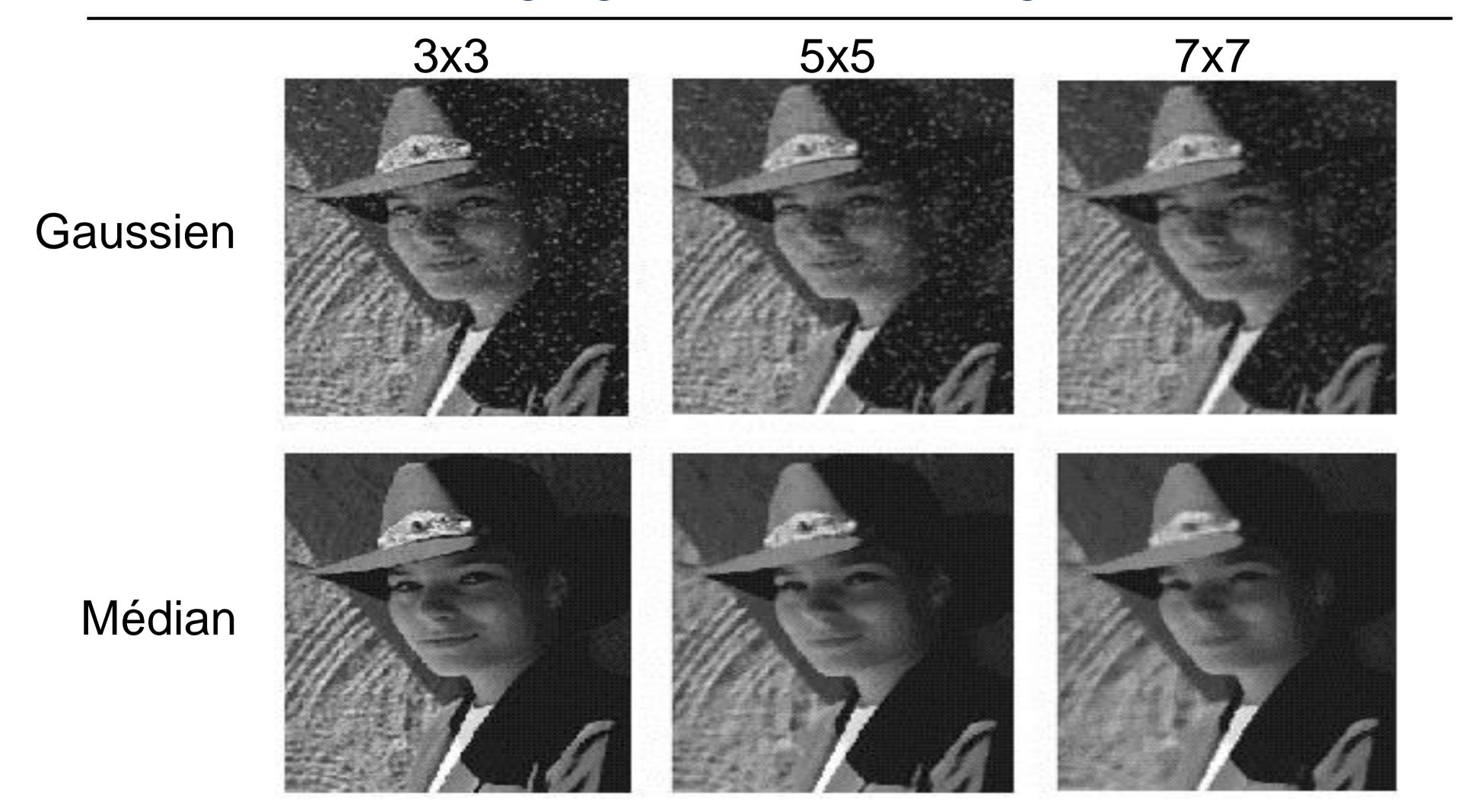
filters have width 5: INPUT MEDIAN MEAN

### Filtre Médian

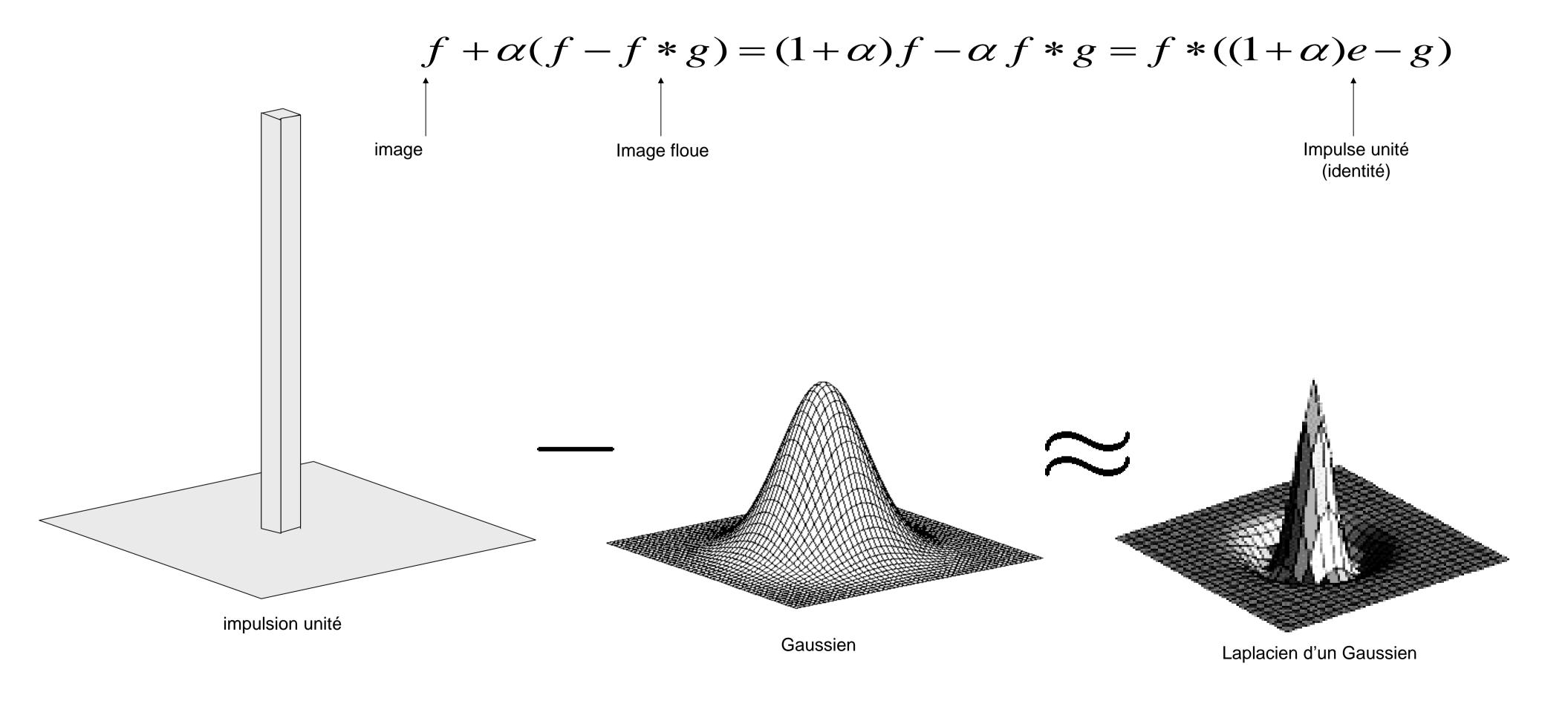


MATLAB: medfilt2(image, [h w])

### Filtrage gaussien vs. filtrage médian

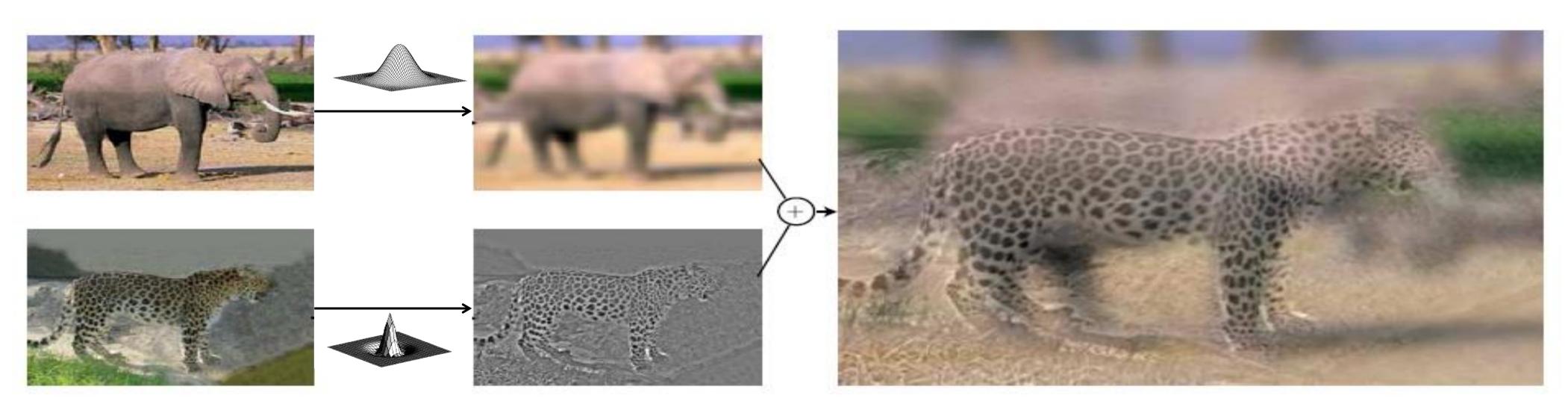


#### Filtre dé-accentuateur



# Application: Images Hybrides

#### Filtre Gaussien



Filtre Laplacien

Voir : A. Oliva, A. Torralba, P.G. Schyns, <u>"Hybrid Images,"</u> SIGGRAPH 2006 Exercices ...

# Exemple 1: pour s'échauffer



0	0	0
0	1	0
0	0	0



**Original** 

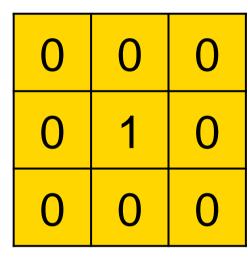
Filtre1

Résultat

# Exemple 1: résultat



**Original** 



**Filtre** 



Résultat (pas de changement)

# Exemple 2:



0	0	0
0	0	1
0	0	0



**Original** 

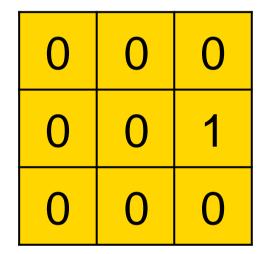
**Filtre** 

Résultat

## Exemple 2:



**Original** 



**Filtre** 

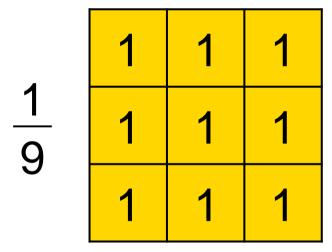


Résultat
(décalage à gauche
d'1 pixel)

# Exemple 3:



**Original** 



Filtre (total=1)

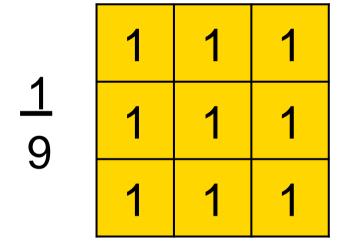


Résultat

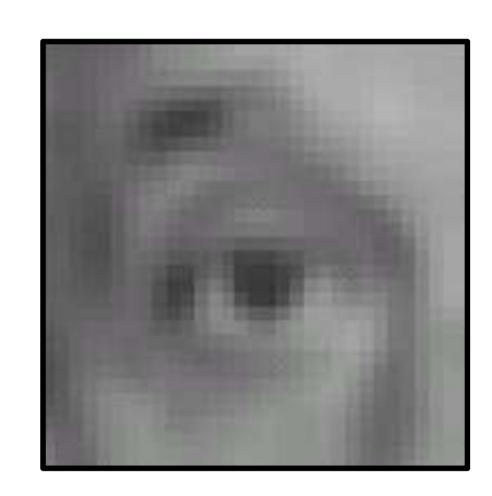
### Exemple 3:



**Original** 



Filtre
(somme des poids = 1)



Résultat
(flou dû au filtre box)

# Exemple 4:



0	0	0	
0	2	0	-
0	0	0	

$$- \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Résultat

# Exemple 4:



0	0	0
0	2	0
0	0	0

$$- \frac{1}{9} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$$

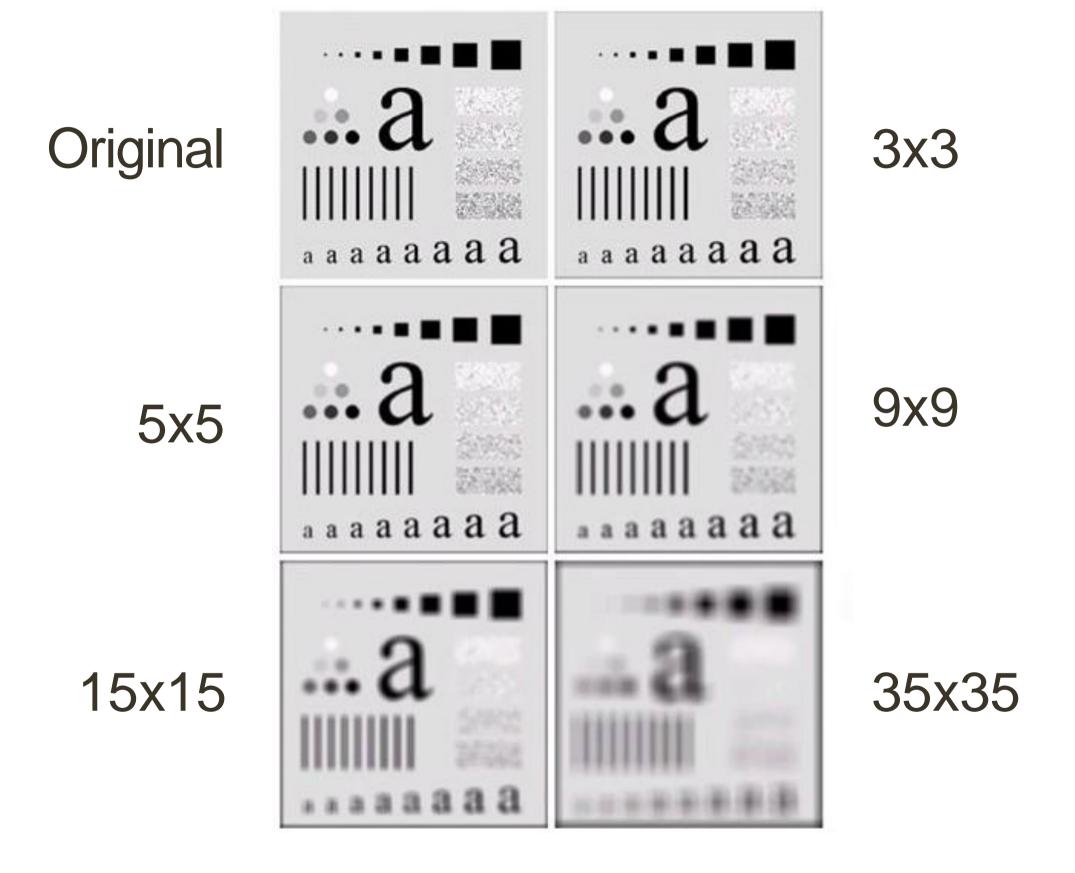


**Original** 

Filtre (total=1)

Résultat (accentuer)

### Exemple 5: Lissage avec un Filtre Box



## **Exemple 5: Filtres Gaussiens**

