

I. Transformée en Z des Signaux Discrets

Rappel : la transformée en Z, notée TZ, d'un signal discret $x(n)$ est définie par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} Z[x(n)] = \underbrace{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}}_{\text{Transformée en Z bilatérale}}$$

Si $x(n)$ est un signal causal on définit alors la transformée en Z unilatérale de $x(n)$ donné par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} Z[x(n)] = \underbrace{X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}}_{\text{Transformée en Z unilatérale}}$$

Par la suite nous supposons tous les signaux sont causaux.

1. Calculer la transformée en Z du signal suivant :

$$x(n) = (0.5)^n u(n)$$

Solution :

$$\text{Le signal } x(n) = (0.5)^n u(n) = [1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, \dots, 0.5^n, \dots]$$

En appliquant directement la définition de la transformée en Z, on trouve :

$$X(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2z^{-2} + 0.5^3z^{-3} + \dots + 0.5^n z^{-n} + \dots$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad , |0.5z^{-1}| < 1 \text{ ou } |z| > 0.5$$

• Propriété de la linéarité de la TZ :

$$a h_1(n) + b h_2(n) \xrightarrow{TZ} a H_1(z) + b H_2(z) \quad \text{avec } ROC_H = ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}$$

2. Trouver $H(z)$ transformée en Z du signal discret $h(n)$ ainsi que la région de convergence ROC pour :

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

Solution :

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \rightarrow ROC_{H_1} \quad , |z| > \frac{1}{2}$$

$$H_2(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \rightarrow ROC_{H_2}, |z| > \frac{1}{3}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z)$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \rightarrow ROC_H = ROC_{H_1} \cap ROC_{H_2}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- En utilisant le théorème du retard, trouver la transformée en Z du signal suivant :

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u(n-2)$$

Réponse :

$$H(z) = \frac{2z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{avec } |z| > \frac{1}{2}$$

- En utilisant le théorème de dérivation dans Z, exprimé par :

$$n x(n) \xleftrightarrow{TZ} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

calculer la T.Z du signal discret suivant :

$$h(n) = n u(n)$$

Réponse :

$$H(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

- Déterminer la transformée en Z des signaux discrets suivants :

- $x(n) = n^2 + 3n + 2$
- $y(n) = n \cdot 2^n$
- $h(n) = (n-3)u(n-3)$
- $g(n) = (n+2)^2$

Réponses :

- $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{3z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)}$
- $Y(z) = \frac{2z}{(z-2)^2}$
- $H(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$
- $G(z) = \frac{z^3(z+1)}{(z-1)^3} - z$

II. Transformée en Z Inverse

- Déterminer les signaux discrets causaux, par transformée en Z inverse, des expressions suivantes :

- $X_1(z) = \frac{4z}{(z-1)} - \frac{3z}{(z-1)^2} \quad \text{pour } |z| > 1$
- $X_2(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-3)} \quad \text{pour } |z| > 3$
- $X_3(z) = \frac{3}{(z-2)} \quad \text{pour } |z| > 2$

Réponses :

- $x_1(n) = (4 - 3n)u(n)$
- $x_2(n) = (3^n - 1)u(n)$
- $x_3(n) = 3 \cdot 2^{n-1}u(n-1)$

4. Trouver $x(n)$ dont la T.Z est donnée par :

$$X(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \quad \text{et ROC } |z| > \frac{1}{2}$$

Solution :

Décomposition en éléments simples de $X(z)$:

$$\bullet \quad X(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Calcul des coefficients A_1 et A_2 :

- $A_1 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2(2)}{1-\frac{1}{3}(2)} = -9$
- $A_2 = \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z) \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-2(3)}{1-\frac{1}{2}(3)} = 10$

Ainsi, on peut écrire :

$$X(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = -\frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Ce qui donne par transformée en Z inverse, en utilisant la table des transformées en Z :

$$x(n) = -9 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Table des Propriétés de la transformée en Z

	Opérations dans le domaine discret	Propriété équivalente de la TZ
1	Linéarité : $a x(n) + b y(n)$	$a X(z) + b Y(z)$
2	Retard temporel: $x(n - k)$	$z^{-k} X(z)$
3	Avance temporelle: $x(n + k)$	$z^k X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j}$
4	Convolution: $x(n) * y(n)$	Multiplication : $X(z) \times Y(z)$
5	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
6	$n x(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
7	$n^k x(n)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^k X(z) = -z \frac{d}{dz} \left[\left(-z \frac{d}{dz}\right)^{k-1} X(z) \right]$

Table de la Transformée en Z des Fonctions usuelles

Transformées en Z

	Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
6	$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7	$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
8	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
10	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
11	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $