Chapitre 4 : Dynamique des fluides visqueux newtoniens
(+ Une brève introduction à l'étude des gaz)

Voici les points essentiels à retenir :

(1) Pour mettre en évidence les forces de viscosité, on fait couler de l'eau dans une conduite cylindrique horizontale de même section S entre deux points A et B qui se situent de ce fait à la même hauteur ($z_A = z_B = z$) et où sont installées deux prises de pression (deux cylindres verticaux de petit diamètre et de même hauteur h). Cette eau est incompressible et en écoulement permanent. Le débit volumique y donc est conservé :

$$v_A S_A = v_B S_B \quad \text{or} \quad S_A = S_B = S \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B$$

D'après la relation de Bernoulli vu au chapitre 3, il y a conservation de la charge de l'écoulement dans la conduite :

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g z_A + P_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g z_B + P_B$$

Cette équation conduit à $P_A = P_B$ car $z_A = z_B$ et $v_A = v_B$. On s'attend donc à avoir les mêmes hauteurs d'eau en A et B ($h_A = h_B$). Or, on observe expérimentalement que $h_B < h_A$ indiquant une perte de charge dans la conduite due aux forces de viscosité (forces de frottement) qui n'ont pas été prises en compte dans la relation de Bernoulli.

2) Considérons un écoulement d'eau sur une surface plane fixe Q_0. Cet écoulement est dit laminaire plan car le mouvement de l'eau se réduit au glissement des couches de l'eau les unes sur les autres. Les couches supérieures (loin de Q_0) plus rapides sont ralenties par les couches inférieures plus lentes (car proches de Q_0). Réciproquement, les couches inférieures sont entrainées par les couches supérieures plus rapides.

3) Un fluide, en écoulement visqueux laminaire plan, de vitesse $\vec{v} = v(z,t)\,\vec{i}$, est dit newtonien si :

$$\tau = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \tau \text{ négatif si } \frac{\partial v}{\partial z} \text{ est positif}$$

τ représente la force de freinage par unité de surface exercée sur la couche supérieure par la couche inférieure plus lente. La constante de proportionnalité définit la viscosité dynamique du fluide. Elle s'exprime dans le système SI en poiseuille (P*l*) avec :

$$1\ \mathrm{P}l = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}} = 1\ \mathrm{Pa.s}$$

Le fluide est parfait pour $\tau = 0$. Si la vitesse de la couche de fluide mobile est v(Q) et la distance qui la sépare de la surface plane fixe Q_0, e, la force de freinage par unité de surface τ s'écrit :

$$\tau = -\eta \frac{v(Q)}{e}$$

On définit aussi la viscosité cinématique du fluide par :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Où ρ est la masse volumique. ν s'exprime en m^2/s.

3) Dans l'expérience décrite au point (1), la perte de charge entre les points A et B est donnée par :

$$\text{charge en A} - \text{charge en B} = P_A - P_B = \Delta P$$

D'où l'on définit la perte de charge par unité de longueur (perte de charge linéique) :

$$\frac{\Delta P}{l}$$

l étant la distance AB entre les points A et B de la conduite cylindrique. La perte de charge linéique dépend de la viscosité η du fluide, du diamètre $d = 2R$ de la conduite (avec R, rayon du cylindre) et du débit volumique D_V. En écoulement permanant laminaire, la loi de Poiseuille permet de relier ces trois grandeurs :

$$D_V = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta P}{l} \frac{d^4}{\eta}$$

La vitesse de l'écoulement en un point r de la conduite est donné par :

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{l} (R^2 - r^2)$$

Cette vitesse est maximale pour $r = 0$ c'est-à-dire sur l'axe du cylindre :

$$v_{Max} = v(r = 0) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{l} R^2$$

La vitesse v(r) se met alors sous la forme suivante :

$$v(r) = v_{Max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Cette expression montre que v(r) est une fonction décroissante de r : elle est maximale sur l'axe ($r = 0$) et nulle sur la paroi latérale du cylindre ($r = R$). Elle a un profil parabolique. La vitesse moyenne vaut :

$$v_{moy} = \frac{v_{Max}}{2}$$

4) Par définition, la résistance hydraulique est :

$$R_H = \frac{\Delta P}{D_V}$$

Elle s'exprime en $Pa.s.m^{-3}$. D'après la loi de Poiseuille, on a :

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta P \quad \Rightarrow \quad R_H = \frac{\Delta P}{D_V} = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$$

5) Il existe une analogie entre les circuits électrique et hydraulique :

Type d'écoulement	***Charges mobiles***	***Particules fluides***
Débit	Intensité I	Débit volumique D_V
Perte le long du conducteur	$\Delta U = U_A - U_B$ (chute de tension)	$\Delta P = P_A - P_B$ (perte de charge)
Résistance	$R_E = \frac{\Delta U}{I}$	$R_H = \frac{\Delta P}{D_V}$
Groupement en série des conducteurs	$I = I_k, \quad \Delta U = \sum \Delta U_k$ $R_{E,Q} = \sum R_{E,k}$	$D_V = D_{V,k}, \quad \Delta P = \sum \Delta P_k$ $R_{H,Q} = \sum R_{H,k}$
Groupement en parallèle des conducteurs	$\Delta U = \Delta U_k, \quad I = \sum I_k$ $\frac{1}{R_{E,Q}} = \sum \frac{1}{R_{E,k}}$	$\Delta P = \Delta P_k, \quad D_V = \sum D_{V,k}$ $\frac{1}{R_{H,Q}} = \sum \frac{1}{R_{H,k}}$

6) Le nombre de Reynolds dans le cas d'un écoulement de vitesse moyenne v_{moy} dans un tube cylindrique de diamètre d est donné par :

$$R_e = \frac{\rho v_{moy} d}{\eta} = \frac{v_{moy} d}{\nu}$$

C'est un nombre sans dimension. Il caractérise le régime d'écoulement ; ainsi pour un écoulement d'eau dans une conduite cylindrique, on a :

$R_e < 2000$: écoulement laminaire

$R_e > 3000$: écoulement turbulent

Pour un écoulement d'eau dans un tube de 4 mm de diamètre et 15 m de long, à des vitesses autour de 0.5 m/s, l'expérience montre que $R_e = 2040$. Il est difficile de réaliser des écoulements dont la vitesse et la viscosité sont suffisamment bien contrôlés pour espérer observer avec précision la transition entre les deux types d'écoulement.

7) Méthodes de mesure de la viscosité :

- Méthode de Couette
- Viscosimètre à tube capillaire
- Chute d'une bille dans un tube vertical

8) Introduction à l'étude des gaz :

• L'étude de l'écoulement des fluides compressibles (gaz) tient compte de la variation importante de la masse volumique avec la pression et la température. Elle se fait en s'appuyant sur la thermodynamique.

• L'équation de Barré de Saint Venant est l'équation de la conservation de l'énergie pour un fluide compressible (gaz) comme l'est l'équation de Bernoulli pour un fluide incompressible (liquide). Elle a pour expression :

$$H + \frac{1}{2} v^2 = Cte$$

Où H est l'enthalpie massique et $v^2/2$, l'énergie cinétique massique.

• On appelle nombre de Mach le rapport :

$$Ma = \frac{v}{c}$$

Où v est la vitesse locale du fluide en m/s et c la vitesse du son dans le même fluide, également en m/s. C'est donc un nombre sans dimension.

• Une onde de choc dans l'air est une transition brutale des grandeurs d'état de ce gaz (température, pression et masse volumique) sur des distances très courtes. Le bang supersonique caractérise le bruit causé par une onde de choc d'un avion, par exemple, qui atteint une vitesse supersonique, c'est-à-dire supérieure à celle du son, soit supérieure à 340 m/s à 20°C et à une pression normale. ($Ma > 1$).

• La tuyère de Laval est un tube en forme de sablier utilisé pour accélérer les gaz chauds et sous pression jusqu'à ce qu'ils atteignent une vitesse supersonique. La tuyère est une pièce essentielle dans la fabrication des moteurs à réaction des avions.

Bon courage
Prof. S. KHENE