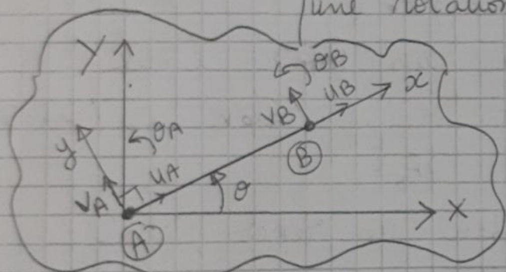
Changement de repère
cas d'un élément poutre générale

une poutre (AB), avec deux noeuds et 3ddl par noeud

noeud (A) : $\begin{cases} \text{possède deux translations } u_A \text{ et } V_A \\ \text{une rotation } \theta_A \end{cases}$

noeud (B) : $\begin{cases} \text{possède deux translations } U_B \text{ et } V_B \\ \text{une rotation } \theta_B \end{cases}$



$(X, Y) \longrightarrow$ repère global

$(x, y) \longrightarrow$ repère local orienté de (θ) par rapport à $(X-Y)$

noeud (A) : $\{q_{eA}\}[K_{eA}] = \{F_{eA}\}$

$$\longrightarrow \begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} [K_{eA}] = \begin{Bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ M_A \end{Bmatrix}$$

noeud (B) : $\{q_{eB}\}[K_{eB}] = \{F_{eB}\}$

$$\longrightarrow \begin{Bmatrix} U_B \\ V_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} [K_{eB}] = \begin{Bmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Elément (AB) : $\{q_{AB}\}[K_{AB}] = \{F_{AB}\}$ (repère global)

$$\longrightarrow \begin{Bmatrix} U_{AG} \\ V_{AG} \\ \theta_{AG} \\ U_{BG} \\ V_{BG} \\ \theta_{BG} \end{Bmatrix} [K_{AB}] = \begin{Bmatrix} F_{AGx} \\ F_{AGy} \\ M_A \\ F_{BGx} \\ F_{BGy} \\ M_B \end{Bmatrix}$$

Après transformation on obtient :

$$\begin{cases} U_A = U_{AG} \cos\theta + V_{AG} \sin\theta \\ V_A = -U_{AG} \sin\theta + V_{AG} \cos\theta \\ \theta_A = \theta_{AG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_B = U_{BG} \cos\theta + V_{BG} \sin\theta \\ V_B = -U_{BG} \sin\theta + V_{BG} \cos\theta \\ \theta_B = \theta_{BG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Ax} = F_{AGx} \cdot \cos\theta + F_{AGy} \cdot \sin\theta \\ F_{Ay} = -F_{AGx} \cdot \sin\theta + F_{AGy} \cdot \cos\theta \\ M_A = M_{AG} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Bx} = F_{BGx} \cdot \cos\theta + F_{BGy} \sin\theta \\ F_{By} = -F_{BGx} \sin\theta + F_{BGy} \cos\theta \\ M_B = M_{BG} \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ \theta_A \\ U_B \\ V_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{[R]} \begin{Bmatrix} U_{AG} \\ V_{AG} \\ \theta_{AG} \\ U_{BG} \\ V_{BG} \\ \theta_{BG} \end{Bmatrix}$$

Donc : $\{q_{AB}\} = [R]\{q_{ABG}\}$

$\{F_{AB}\} = [R]\{F_{ABG}\}$

$[R]$: matrice de rotation

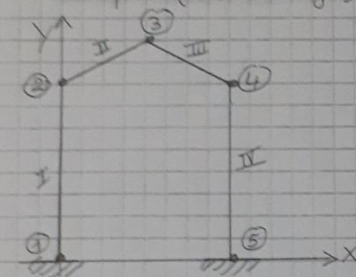
Nous avons : $[K_{AB}]\{q_{AB}\} = \{F_{AB}\}$ ⟶ repère local

Repère global ⟶ $[K_{AB}][R]\{q_{ABG}\} = [R]\{F_{ABG}\}$

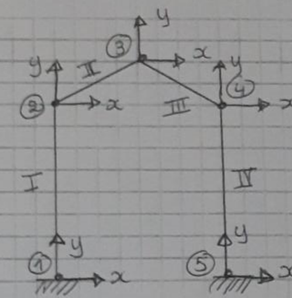
$$\underbrace{[R]^{-1}[K_{AB}][R]}_{[K_{ABG}]}\{q_{ABG}\} = \underbrace{[R]^{-1}[R]}_{[I]\ \text{matrice unitaire}}\{F_{ABG}\}$$

Donc : $[K_{ABG}] = [R]^{-1}[K_{AB}][R]$

Exemple (Assemblage) :



structure (système d'axes global)



structure (systèmes d'axes locaux)

Elément I : Noeud ① Noeud ② $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Elément II : Noeud ② Noeud ③ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$

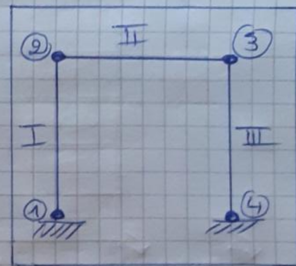
Elément III : Noeud ③ Noeud ④ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$

Elément IV : Noeud ④ Noeud ⑤ $\rightarrow \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} \\ K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$

$$[K_G] = \begin{array}{c} \text{noeud} \downarrow \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{noeud} \rightarrow ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \end{array}$$

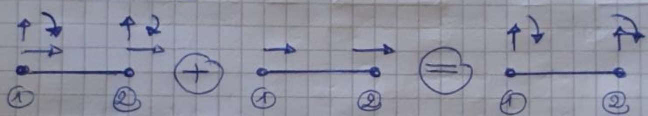
Exemple ② : Assemblage

Soit la structure composée de trois éléments (I, II, III) représentée ci-contre.



Elément : barre avec (02) noeuds

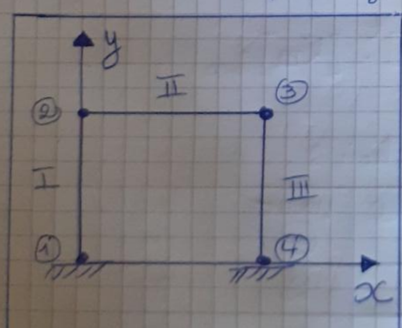
Comportement : $\begin{cases} \text{flexion + membrane} \\ \text{3 ddl par noeud} \end{cases}$



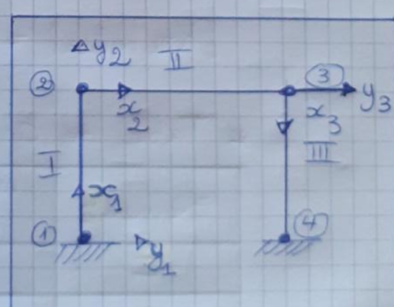
* Le vecteur déplacement élémentaire :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow$$ donc la matrice de rigidité locale sera de taille 6×6

* Choix du repère globale pour la structure :



Repère globale



Repères locaux

- Elément I : avec les noeuds ① et ②
  le repère local (x_1, y_1) ne coïncide pas avec le repère global (x, y)
  $\longrightarrow$ il faut une transformation d'axes vers le global avec un angle de ($\theta = 90°$)

$$[K_I]_{global} = [D]^t \cdot [K_I]_{local} \cdot [D]$$

- Elément II : avec les noeuds ② et ③
  le repère local (x_2, y_2) coïncide avec le repère global (x, y)
  $\longrightarrow$ la transformation d'axes n'est pas nécessaire.

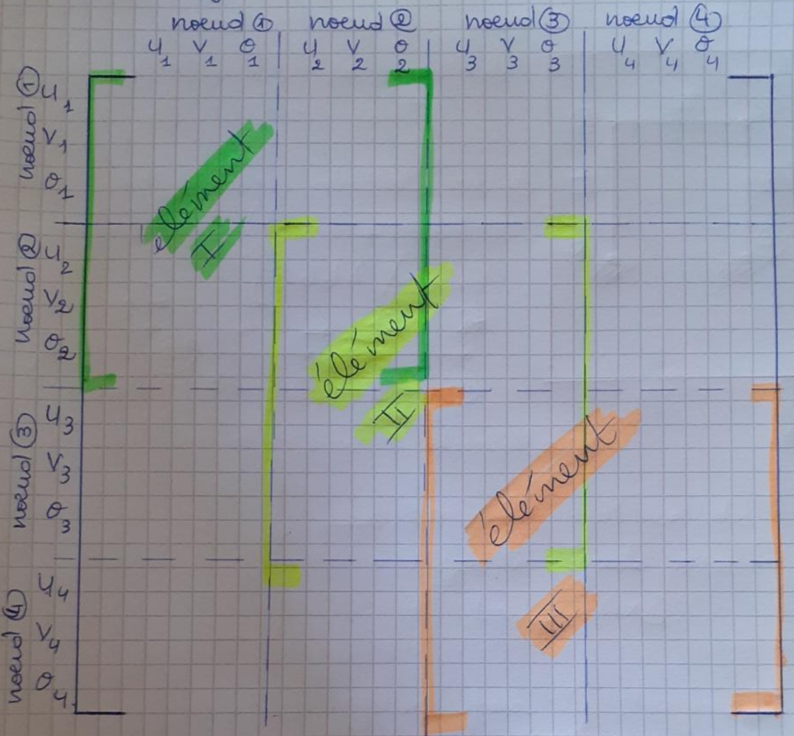
- Elément III : avec les noeuds ③ et ④
  le repère local (x_3, y_3) ne coïncide pas avec le repère global (x, y)
  $\longrightarrow$ il faut une transformation d'axes vers le globale avec un angle de ($\theta = -90°$)

$$[K_{III}]_{global} = [D]^t \cdot [K_{III}]_{local} \cdot [D]$$

* Table de connection :

Eléments	noeud ①	noeud ②	Angle (θ)
I	1	2	90°
II	2	3	0°
III	3	4	-90°

* Assemblage :



noeud ① noeud ② noeud ③ noeud ④
u_1 v_1 θ_1 u_2 v_2 θ_2 u_3 v_3 θ_3 u_4 v_4 θ_4
noeud ① u_1 v_1 θ_1
noeud ② u_2 v_2 θ_2
noeud ③ u_3 v_3 θ_3
noeud ④ u_4 v_4 θ_4
élément I
élément II
élément III