

Notes de cours

Méthode des Eléments Finis

Mme Nawel MEZIGHECHE
Maitre Assistant
Université Badji Mokhtar de Annaba

1) Introduction générale

Introduction générale

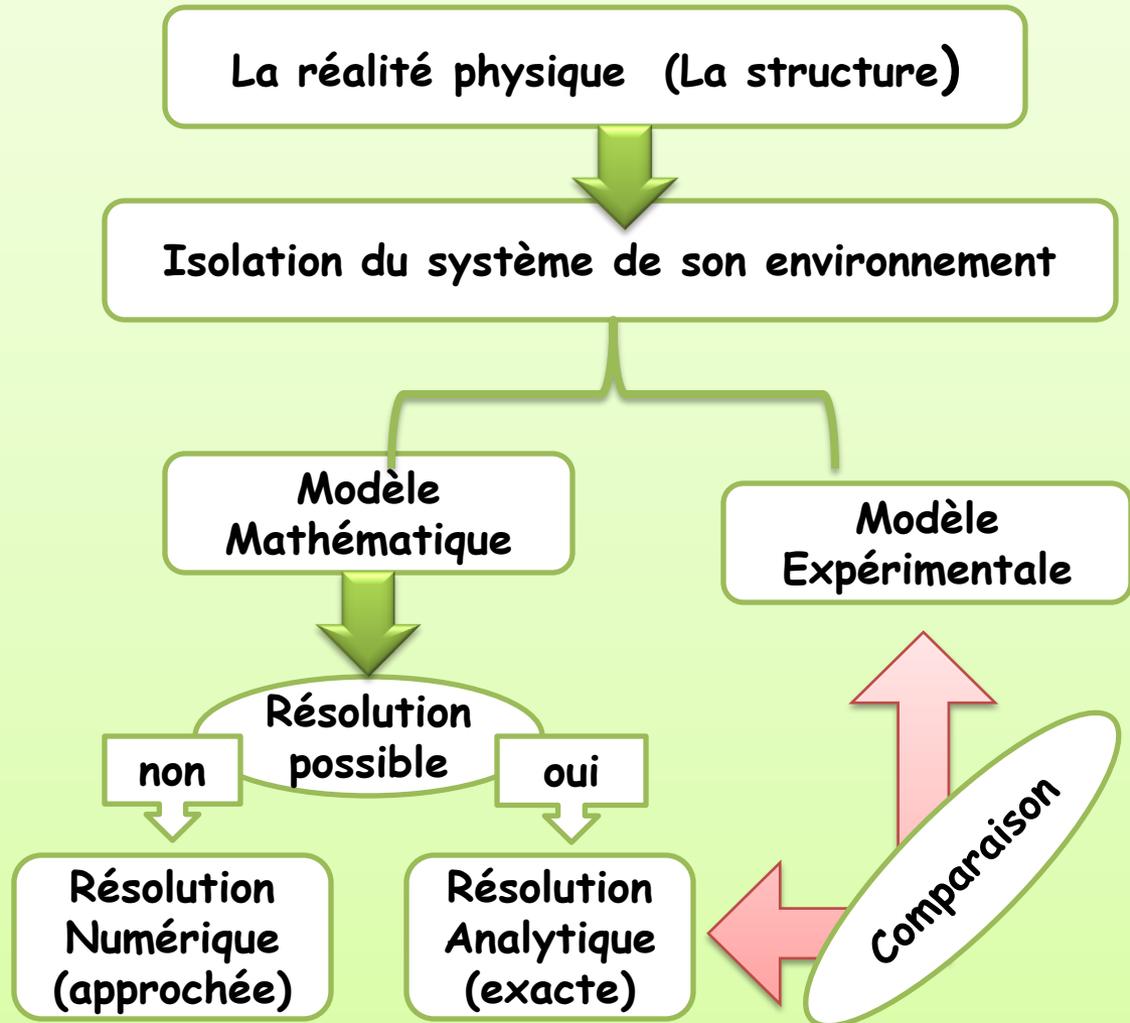
Mission et démarche de l'ingénieur :

- La mission d'un ingénieur , est de concevoir et de dimensionner la structure de manière à fournir à l'entrepreneur les plans nécessaires à la réalisation de cette structure.
- L'ingénieur dans sa démarche de conception doit prévoir le comportement des systèmes physiques , il a recours donc à une simulation , et il doit être conscient qu'entre le modèle et la réalité physique il y a un grand nombre d'approximations maîtrisées.

1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :



1) Introduction générale

Introduction générale

Mission et démarche de l'ingénieur :

SIMULATION :

Définition de selon le dictionnaire français
Larousse:

Représentation du comportement d'un
processus physique au moyen d'un modèle
matériel dont les paramètres et les variables
sont les images de ceux du processus étudié.

(Les modèles de simulation prennent le plus
souvent la forme de programmes
d'ordinateurs auxquels sont parfois associés
des éléments de calcul analogique.)

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode

des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- Les sciences de L'ingénieur traduisent le comportement des systèmes physiques (corps solides ou liquides ...) par des équations d'équilibre aux dérivées partielles, qui sont pas faciles à intégrer.
- Dans la pratique , les solutions analytiques ne sont possibles que pour des cas très simples , dans le cas contraire , la résolution est impossible pour deux raisons :
 - Le champs à modéliser est inconnu.
 - La géométrie est trop complexe.

1) Introduction générale

2) Concept de la Méthode

des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- **La première difficulté** : pour déterminer les contraintes et les déformations, il faut déterminer les déplacements qui sont les inconnus du problème, mais ces derniers sont obtenus par la résolution des équations aux dérivées partielles qui sont pas faciles à intégrer.
- **La deuxième difficulté**: la géométrie des structures est souvent très compliquée, il faut donc découper le système en composants plus simples, dans chaque partie découpée de la structure on doit déterminer les champs locaux des inconnus.

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la Méthode
des Eléments Finis

Concept de la Méthode des Eléments Finis

- La connaissance des informations locales permettra de reconstituer la géométrie complexe initiale.
- L'idée de la MEF revient à remplacer la structure (milieu continu) par une structure discrétisée , elle sera alors divisée en un certain nombre de sous domaines appelés **éléments** , dont l'assemblage de ces éléments reconstituera la géométrie initiale .

Concept de la MEF (du milieu continu au milieu discrétisé)

En Elasticité, le comportement d'un solide (milieu continu) traduit par Equations d'Equilibre

Méthode des résidus pondérés

Méthode des Éléments Finis

Forme intégrale (milieu continu)

Forme intégrale approximée avec interpolation entre les nœuds (milieu discrétisé)

Solution numérique
Détermination de σ, ε et u

Forme algébrique
 $\{f\} = [k] \{u\}$

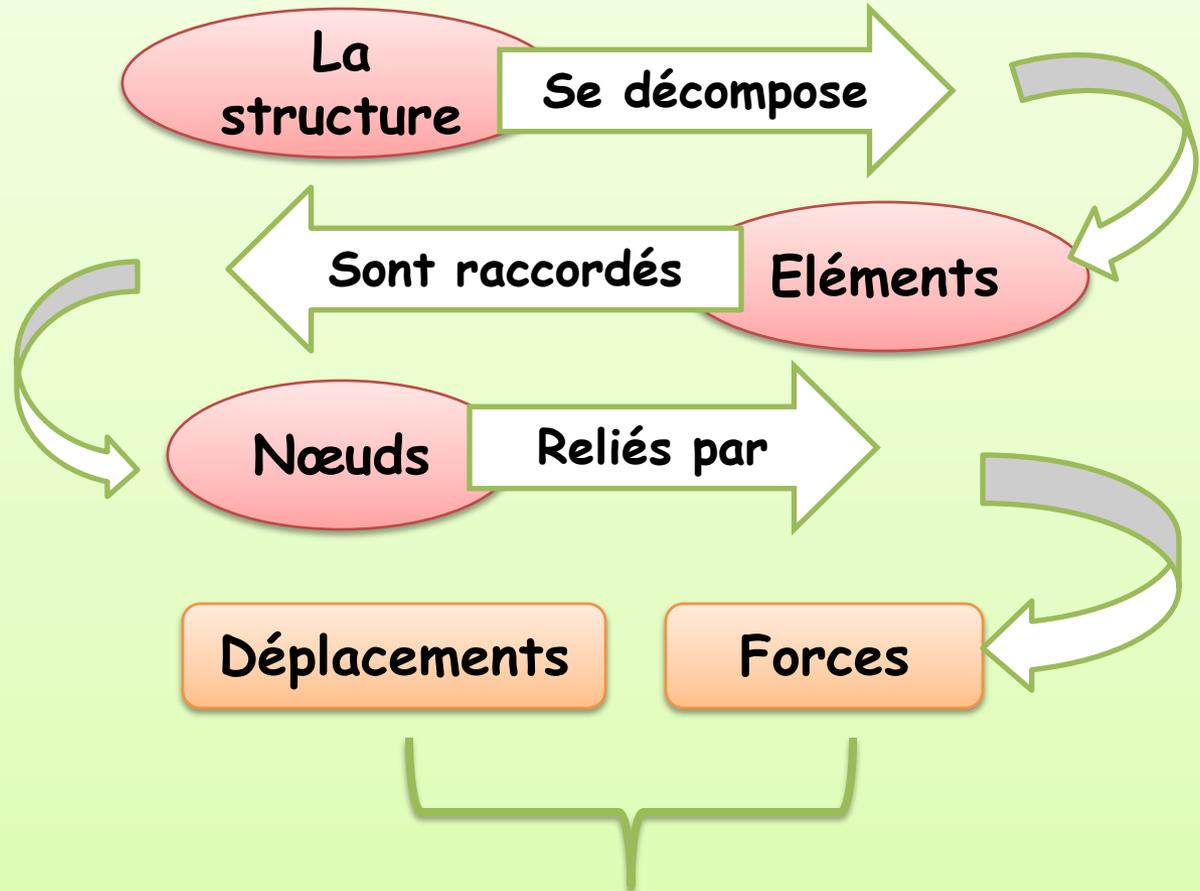
- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la Méthode des Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des structures

La MEF en calcul des structures

- La MEF consiste à décomposer la structure (milieu continu) en éléments simples appelés **éléments finis**, chaque élément est relié à ses voisins par des **nœuds**; dont les degrés de liberté de chaque nœud (**DDL**) constituent les inconnus du problème.

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures

La MEF en calcul des structures



$$\text{Relation de rigidité: } \{f\}=[k] \{u\}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures

La MEF en calcul des structures

Un élément Fini :

- Est un domaine géométrique
- Des nœuds
- Des degrés de liberté
- Fonctions mathématiques aux nœuds

Eléments utilisés

- 1D: Barres, Poutres et Coques axisymétriques
- 2D: Elasticité plane, Plaques minces et coques minces.
- 3D: Solides massifs , plaques épaisses et coques épaisses.

1) Introduction générale

2) Concept de la

Méthode des

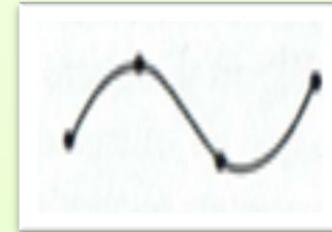
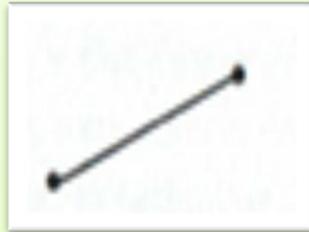
Éléments Finis

3) la MEF en calcul des

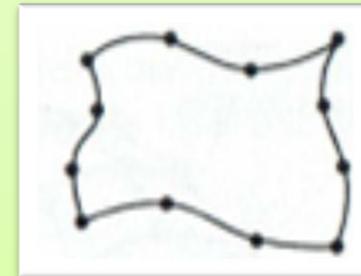
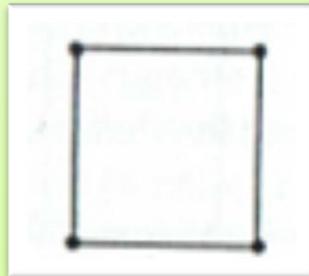
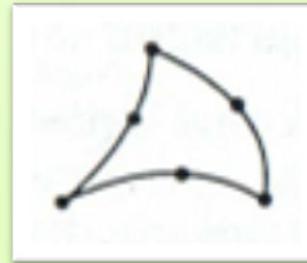
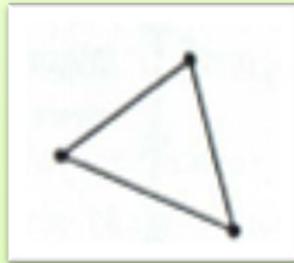
structures

La MEF en calcul des structures

Éléments Finis 1D:



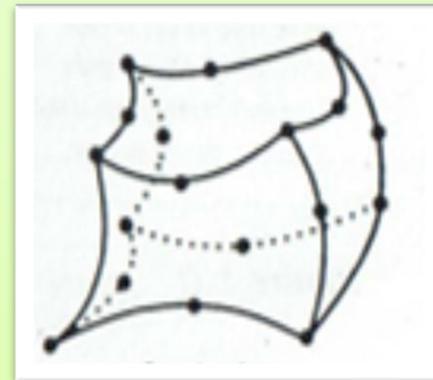
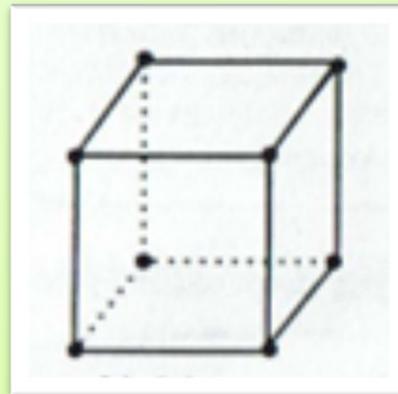
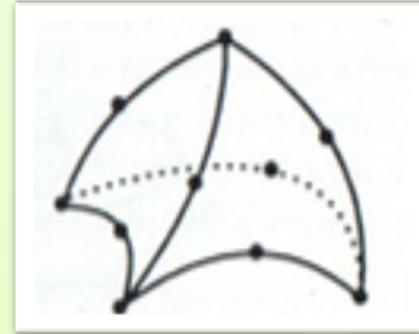
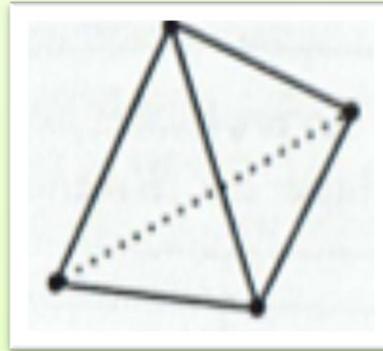
Éléments Finis 2D:



- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures

La MEF en calcul des structures

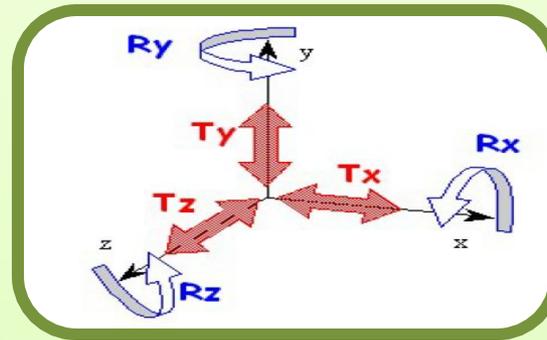
Eléments Finis 3D:



- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures

- La MEF en calcul des structures
Degré de liberté

Propriétés de mobilité d'un nœud
3 Translations et 3 Rotations



Élément
Fini

Peut avoir

Plusieurs
nœuds

Nœud

Peut avoir

Plusieurs
DDL

Donc La relation de rigidité
est un système d'équations

1) Introduction générale

2) Concept de la

Méthode des

Éléments Finis

3) la MEF en calcul des

structures

4) Principe de

l'approximation

Principe de l'approximation.

- Le problème de l'analyse des solides déformables peut être totalement résolu si l'on connaît le champ de déplacement en tous point du milieu .
- Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la détermination de ce champ à un nombre fini de points du milieu appelés nœuds.

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

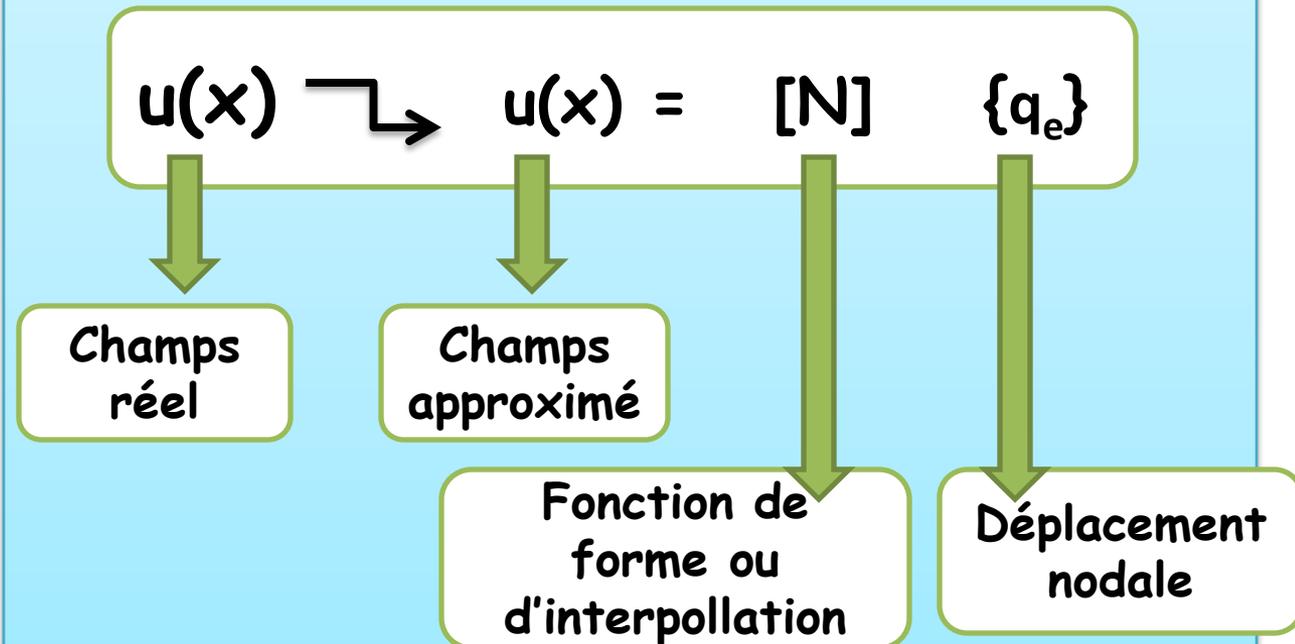
- Le processus du passage du champs continu aux valeurs nodales est appelé **discrétisation**
- Pour définir le champs approché par interpolation des valeurs nodales, on utilise les **fonctions de formes**.
- La fonction de forme permet d'exprimer les déplacements en un point de l'élément à partir des déplacements connus en ses nœuds

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- Le champs de déplacement $u(x)$ d'un élément fini est approximé par une **fonction polynomiale** (de forme) $[N]$, à partir des valeurs nodales de déplacements



- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

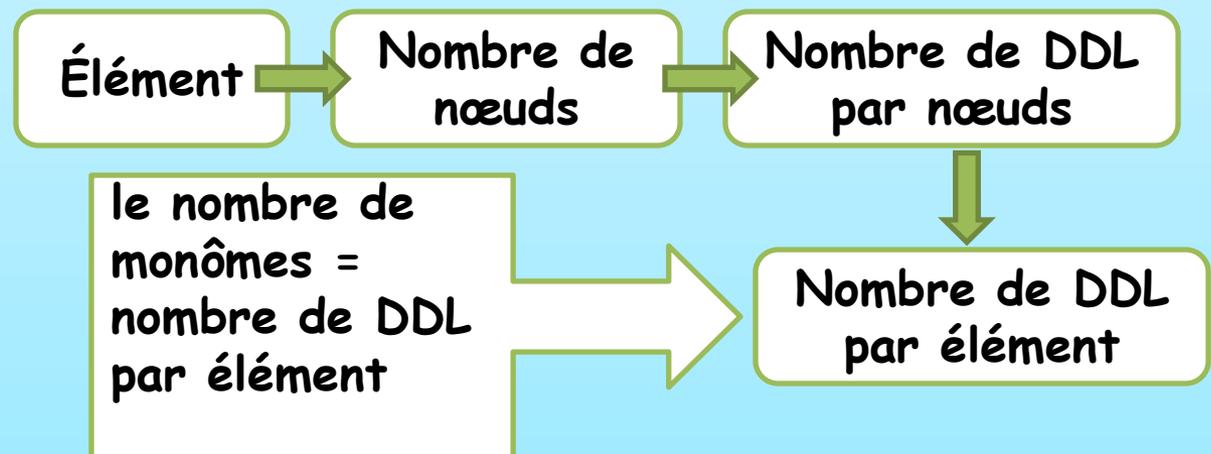
Principe de l'approximation.

Fonctions de forme

- La forme générale de la fonction polynomiale (de forme) est:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \dots$$

- Combien faut il de monômes ?



- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation.

Propriétés de la fonctions de forme

La fonction de forme ou **fonction de pondération** doit être :

- Licite: continue et dérivable
- Vérifiant les conditions aux limites : cinématiquement admissible
- Unique pour un élément et à la frontière entre deux éléments

1) Introduction générale

2) Concept de la

Méthode des

Éléments Finis

3) la MEF en calcul des

structures

4) Principe de

l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Nœud 1 avec 1DDL: translation selon (x) $\rightarrow u_1$

Nœud 2 avec 1DDL: translation selon (x) $\rightarrow u_2$



Le champ de déplacement approximé s'écrit sous la forme:

$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

$$u(x) = [N] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

L'élément 1D avec 2 nœuds et 1DDL par nœud
se trouve avec 2DDL par élément

Donc : la fonction de forme doit avoir deux
monômes

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Eléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Pour déterminer les valeurs des deux coefficients (α_0) et (α_1) on a besoin des conditions aux limites:

$$\text{Nœud 1 (x = 0) : } U(0) = u_1 \longrightarrow \alpha_0 = u_1$$

$$\text{Nœud 2 (x = L) : } U(L) = u_2 \longrightarrow \alpha_1 = (u_2 - u_1)/L$$

Le champ de déplacement approximé devient

$$u(x) = u_1 + [(u_2 - u_1)/L] x$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 2 nœuds

Le champ de déplacement approximé peut prendre la forme:

$$u(x) = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2$$

Après simplification nous obtenant les deux fonctions de forme de l'élément 1D à 2noeuds et 1DDL par nœud :

$$N_1(x) = 1 - x/L$$

$$N_2(x) = x/L$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

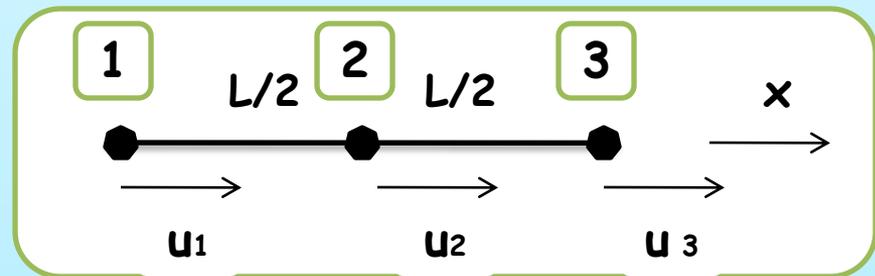
Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Nœud 1 avec 1DDL: translation selon (x)

Nœud 2 avec 1DDL: translation selon (x)

Nœud 3 avec 1DDL: translation selon (x)



$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

$$u(x) = [N] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

L'élément 1D avec 3 nœuds et 1DDL par nœud se trouve avec 3DDL par élément

Donc : la fonction de forme doit avoir trois monômes

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Pour déterminer les valeurs des trois coefficients (α_0), (α_1) et (α_2) on a besoin des conditions aux limites:

Nœud 1 ($x = 0$) : $U(0) = u_1$

Nœud 2 ($x = L/2$) : $U(L/2) = u_2$

Nœud 3 ($x = L$) : $U(L) = u_3$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après résoudre le système de trois inconnus et trois équations on obtient les valeurs:

$$\alpha_0 = u_1$$

$$\alpha_1 = -(3/L) u_1 + (4/L) u_2 - (1/L) u_3$$

$$\alpha_2 = (2/L^2) u_1 - (4/L^2) u_2 + (2/L^2) u_3$$

Le champ de déplacement approximé devient

$$u(x) = u_1 + \left[-(3/L) u_1 + (4/L) u_2 - (1/L) u_3 \right] x + \left[(2/L^2) u_1 - (4/L^2) u_2 + (2/L^2) u_3 \right] x^2$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Exemple pour un élément fini 1D à 3 nœuds

Après simplification on obtient la forme :

$$u(x) = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2 + N_3(x) \cdot U_3$$

$$u(x) = \left[1 - (3/L)x + (2/L^2)x^2 \right] U_1 + \left[(4/L)x - (4/L^2)x^2 \right] U_2 + \left[(-1/L)x + (2/L^2)x^2 \right] U_3$$

Les trois fonctions de forme seront :

$$N_1(x) = 1 - (3/L)x + (2/L^2)x^2$$

$$N_2(x) = (4/L)x - (4/L^2)x^2$$

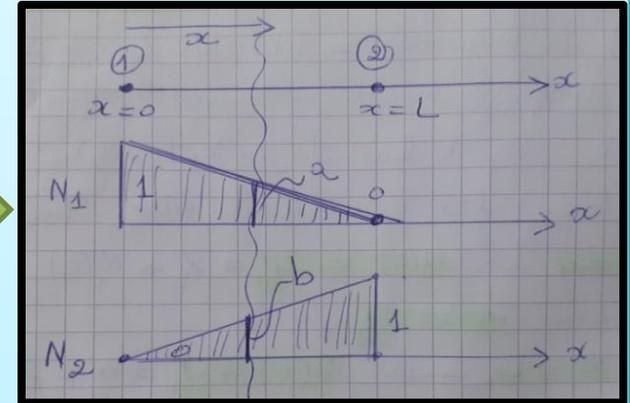
$$N_3(x) = (-1/L)x + (2/L^2)x^2$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

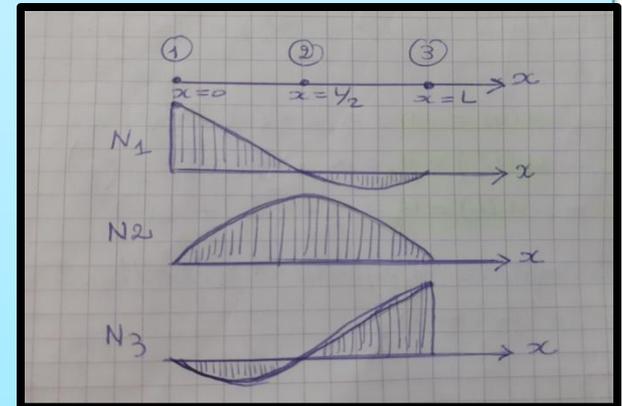
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Élément fini 1D à 2
nœuds : variation de
la fonction de forme
sur l'élément



Élément fini 1D à 3
nœuds : variation de
la fonction de forme
sur l'élément



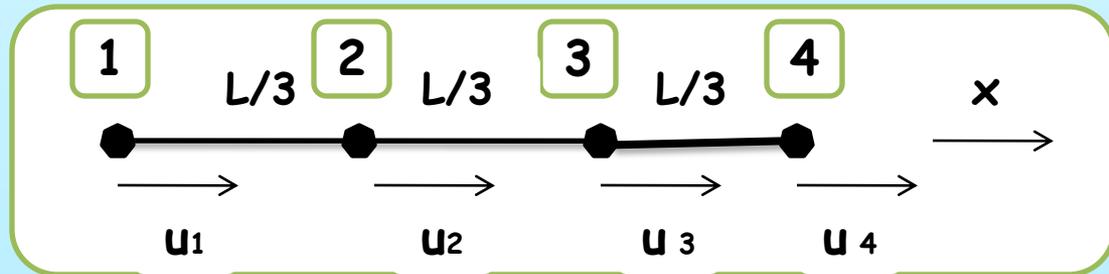
- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Devoir à domicile

Déterminer les fonctions de forme pour un élément (1D) avec quatre nœud et 1DDL par nœud



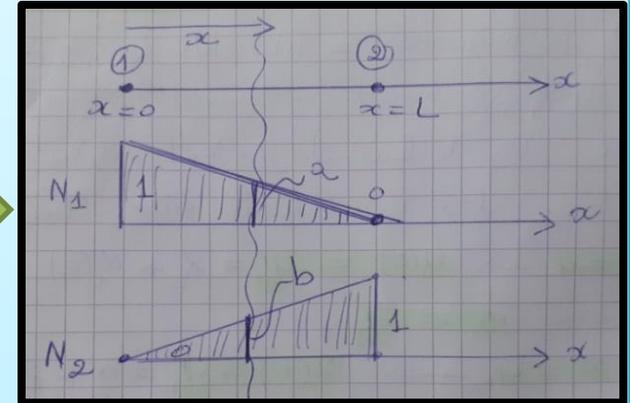
$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation

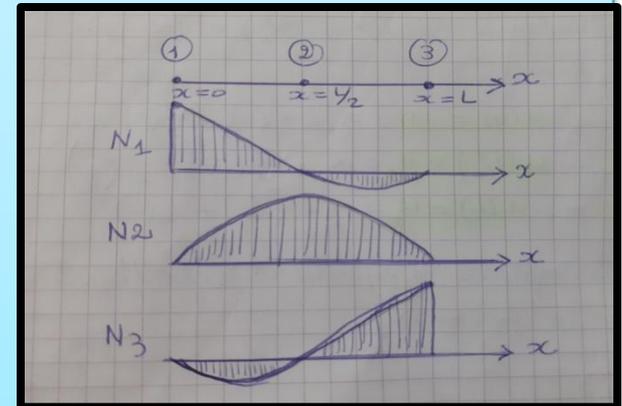
Principe de l'approximation

Fonctions de forme :

Élément fini 1D à 2 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



Élément fini 1D à 3 nœuds : variation de la fonction de forme sur l'élément



- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

- Pour obtenir le système matriciel du comportement élémentaire ,il faut définir les champs intervenant dans le comportement du milieu.
- il s'agit de:

Champ de déplacements $\{U\}$

Champ de contraintes $\{\sigma\}$

Champ de déformations $\{\epsilon\}$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrices de rigidité

- Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures, il se déforme et chaque point de coordonnées (x, y, z) se déplace en $(x+u, y+v, z+w)$; les déplacements relatifs des points génèrent des déformations.
- Dans un élément, le champ de déplacements est défini par l'interpolation des valeurs nodales des déplacements (u, v, w) .

$$u(x) = [N] \{q_e\}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

$$U(x) = [N] \{q_e\}$$

Dans le cas élastique linéaire, les déformations sont donnés par les dérivées des déplacements

$$\{\varepsilon\} = [D] \{U\}$$



cas (1D)

$[D]$: Matrice des opérateurs de dérivées partielles

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

En élasticité linéaire ,la loi de HOOK permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations .

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\}$$

[H] :Matrice de HOOK en fonction du module d'élasticité (E) et coefficient de poisson (ν)

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrices de rigidité

Le comportement d'un élément fini peut être défini par un système d'équations linéaires sous la forme :

$$\{F_e\} = [K_e] \{q_e\}$$

$[K_e]$: Matrice de rigidité élémentaire
 $\{q_e\}$: vecteur des déplacements nodaux
 $\{F_e\}$: vecteur des forces nodales
équivalentes

$$\{F_e\} = \{F_e^s\} + \{F_e^v\}$$

Forces
surfaciques

Forces
volumiques

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire peut être écrit sous la forme :

$$[K_e] = \int_v [B]^t \cdot [H] \cdot [B] dv$$

$$[B] = [D] \cdot [N]$$

Matrice des
opérateurs

Fonctions
de forme

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

Matrice de rigidité d'un élément fini (1D) avec (2 nœuds) ,(1DDL) par nœud et de longueur (l)

Nœud 1 avec 1DDL:
translation selon (x) $\longrightarrow u_1$

Nœud 2 avec 1DDL:
translation selon (x) $\longrightarrow u_2$

$$[K_e] = \int_v [B]^t \cdot [H] \cdot [B] dv$$

$$[B] = [D] \cdot [N]$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrices de rigidité

Sachant que :

$$[N] = [N_1=(1-x)/l \quad N_2=x/l]$$

$$\epsilon = \partial u / \partial x$$



$$[D] = \partial / \partial x$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} [B] &= [\partial / \partial x] [(1-x)/l \quad x/l] \\ &= [-1/l \quad 1/l] \end{aligned}$$

$$[K_e] = \int_v \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \cdot [H] \cdot [-1/l \quad 1/l] dv$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrices de rigidité

Nous avons :

$$dv = ds \cdot dx$$

$$[H] = [E]$$

Nous avons donc:

$$[K_e] = ES \cdot \int_x \begin{pmatrix} -1/l \\ 1/l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} dx$$

$$[K_e] = ES \cdot \int_0^l \begin{pmatrix} 1/l^2 & -1/l^2 \\ -1/l^2 & 1/l^2 \end{pmatrix} dx$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires

Formulation des matrice de rigidité

Finalemment on obtient:

$$[K_e] = ES/l. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires
- 6) Assemblage

Assemblage

Pour résoudre un problèmes par la MEF :

1- Choix d'un élément fini simple.

2- Remplacer la structure initiale par la somme des éléments choisis ,reliés par des nœuds en recouvrant au mieux la forme initiale sans faille ni chevauchement.

3- Choisir une fonction d'interpollation pour l'élément fini, déterminer les rigidités élémentaires.

4- Faire l'assemblage

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires
- 6) Assemblage

Assemblage

L'assemblage consiste à reconstituer la structure initiale discrétisée en éléments finis de manière à:

➤ Un nœud appartenant à plusieurs éléments possède un seul déplacement.

➤ les forces agissant sur un nœud appartenant à plusieurs éléments doivent être équilibrées :

$$\sum F_{\text{ext}} + \sum F_{\text{int}} = 0$$

➤ les rigidités d'un nœud appartenant à plusieurs éléments est la somme des rigidités provenant de tous les éléments.

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires
- 6) Assemblage

Assemblage

➤ Les caractéristiques d'un élément fini (élémentaires) sont définies dans un repère local.

$$\{F_e\} = [K_e] \{q_e\}$$

➤ Les caractéristiques d'une structure (structurales) sont définies dans un repère global.

$$\{F_s\} = [K_s] \{q_s\}$$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires
- 6) Assemblage

Assemblage

Passage du domaine discrétisé au domaine continu :

Les caractéristiques(élémentaires):

$\{F_e\}$, $[K_e]$ et $\{q_e\}$

Doivent être sommer
dans un **repère global**
pour obtenir

Les caractéristiques(élémentaires):

$\{F_s\}$, $[K_s]$ et $\{q_s\}$

- 1) Introduction générale
- 2) Concept de la
Méthode des
Éléments Finis
- 3) la MEF en calcul des
structures
- 4) Principe de
l'approximation
- 5) Formulation des
matrices de rigidité
élémentaires
- 6) Assemblage

Assemblage

Pour obtenir la structure assemblée à partir des éléments finis , on doit transformer $\{Fe\}$, $[Ke]$ et $\{qe\}$ qui sont définis dans un repère local au repère global.