Série n° 4

EXERCICE N°1 :
Soit l'application : $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :
$$(x,y) \longrightarrow f \ (x,y) = \left(x^2+y^2, xy\right)$$
Montrer que f est difféomorphisme local sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

EXERCICE N°2 :
Soit l'application : $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :
$$(r,\theta) \longrightarrow f \ (r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
1- Montrer que f est un C^r difféomorphisme local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
2- Montrer que f n'est pas un C^r difféomorphisme local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
3- Peut -on dire que f est un difféomorphisme globale de $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ sur son image

EXERCICE N°3 :
Soit l'application : $f \ : U = \ ]-\pi, \pi[\times]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :
$$(\theta,\rho) \longrightarrow f \ (\theta,\rho) = (\cos\rho\cos\theta, \cos\rho\sin\theta, \sin\rho)$$
1-Montrer que f est immersion
2-Montrer que f est injective

EXERCICE N°4 :
Vérifier que l'application $f \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :
$$(x,y) \longrightarrow f \ (x,y) = \left(x^2, y^2, 2xy, -y\right)$$
est une immersion de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$