Résumé du cours Régulation et Asservissement

1- La transformation de Laplace

1-1 Rappel de la définition

Soit f, fonction de la variable réelle t ; la transformée de Laplace F(p) de la fonction f est définie par :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, f(t)\, dt}$$ notée $F(p) = L[f(t)]$

1-2 Transformée de Laplace de la dérivée

$$\boxed{L[f'(t)] = p \cdot F(p) - f(0^+)}$$

$f(0^+)$ étant la limite à droite de f(t) lorsque t tend vers 0.

Dans le cas où f et ses dérivées sont nulles à l'instant zéro, on obtient :

$$L[f'(t)] = p \cdot F(p)$$
$$L[f''(t)] = p^2 \cdot F(p)$$
....

Nota : L'intérêt de la transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles est de remplacer une opération de dérivation par un produit.

1-3 Transformée de Laplace d'une intégrale

$$\boxed{L\left[\int_0^t f(y)\, dy\right] = \frac{F(p)}{p}}$$

1-4 Théorème de la valeur finale

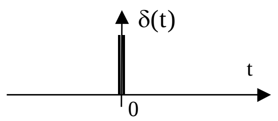
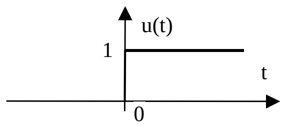
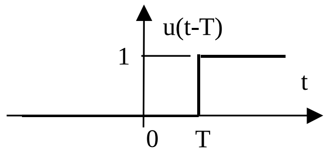
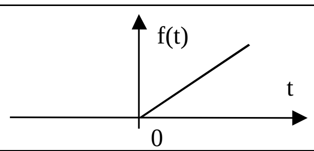
$$\boxed{f(\infty) = \lim_{t\to\infty}(f(t)) = \lim_{p\to 0}(p \cdot F(p))}$$

(théorème valide si et seulement si tous les pôles de p.F(p) ont leur partie réelle négative)

1-5 Théorème du retard

$$\boxed{L[f(t-\tau)] = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)}$$

1-6 Les transformées de fonctions usuelles

Fonction	Figure	Transformée de Laplace
Impulsion unité (fonction de Dirac) : $\delta(t)$ tel que : $\delta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t > 0$ et $\int_a^b \delta(u)du = 1 \quad \forall (a,b) \in R^{+2}$		$L[\delta(t)] = 1$
Echelon unité : u(t) u(t) = 0 si t [0 u(t) = 1 si t > 0		$L[u(t)] = \frac{1}{p}$
Echelon unité retardé : u(t-T) u(t-T) = 0 si t [T u(t-T) = 1 si t > T		$L[u(t-T)] = \frac{1}{p} \cdot e^{-Tp}$
Fonction rampe : f(t) = a.t.u(t) ; de pente : a = constante		$L[a \cdot t \cdot u(t)] = \frac{a}{p^2}$

1-7 Tableau de quelques transformées utiles

Fonctions temporelles (nulles pour t < 0)		Transformée de Laplace
Polynome :	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle :	$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{p+a}$
Sinus :	$\sin(\omega.t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Cosinus :	$\cos(\omega.t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus amorti :	$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega.t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

1-8 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Soit une fraction rationnelle : $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$; La méthode de décomposition est la suivante :

1) <u>factoriser le dénominateur D(p)</u>
pour la suite, prenons en exemple le résultat de factorisation suivant : $D(p) = p^2 \cdot (1 + Tp)$
2) <u>exprimer F(p) en une somme de fraction rationnelles avec des coefficients inconnus ;</u>
(rappel : dans le cas où le pôle est multiple d'ordre n, les puissances successives doivent apparaître dans la décomposition). Avec l'exemple ci dessus, on écrit l'égalité : $\dfrac{N(p)}{D(p)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{C}{1+Tp}$
3) <u>déterminer les coefficients inconnus :</u>
<u>Méthode principale 1</u> (souvent lourde ; conduit à des équations permettant de calculer les coefficients) :
On réduit le terme de droite au même dénominateur et on identifie ensuite les numérateurs.

<u>Méthode principale 2</u> : Elle consiste à multiplier les deux membres de l'égalité par le dénominateur de la fraction dont on recherche le coefficient, puis à annuler le terme qui a été multiplié.
Obtention de B : on multiplie les deux membres par "p^2 " et on pose "p = 0" dans l'égalité.
Obtention de C : on multiplie par (1+Tp) et on pose "p= - 1/T " dans l'égalité.
Obtention de A : il faut réduire au même dénominateur et identifier (méthode 1).

<u>Méthode annexe 3</u> (efficace mais délicate ; ne donne pas tous les coefficients) :
On fait tendre p vers l'infini après multiplication par l'un des dénominateurs de la décomposition.
Pour notre exemple, développer : $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{(1+Tp)N(p)}{D(p)} = AT + 0 + C$

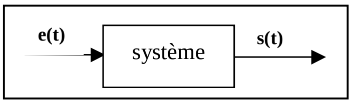
<u>Méthode annexe 4</u> (permet de déterminer un des coefficients) :
On donne une valeur numérique à p.
par exemple, B et C étant connus (méthode 2), on prend p=1 pour obtenir une équation avec l'inconnue C.

2- Les schémas fonctionnels

2-1 Fonction de transfert d'un système linéaire

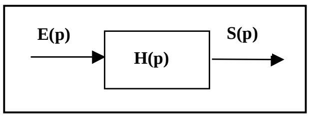
Equation(s) différentielle(s) et schéma décrivant le comportement du système :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + ... + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t)$$



En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on obtient **la fonction de transfert** (ou transmittance) qui est une fraction rationnelle H(p) telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0)}$$



Le degré (n) du dénominateur est appelé "**ordre**" de la fonction de transfert.

Une autre forme de H(p) est la "**forme canonique**" :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \cdot \frac{(1 + b'_1 \cdot p + ... + b'_{m-1} \cdot p^{m-1} + b'_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + a'_1 \cdot p + ... + a'_{\ell-1} \cdot p^{\ell-1} + a'_\ell \cdot p^\ell)}$$

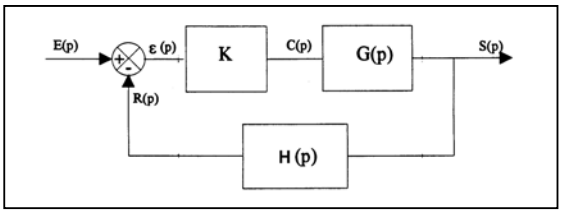
- Le facteur K est appelé "**gain statique**" du système ou "gain" de la fonction de transfert.
- S'il existe une racine nulle d'ordre α de D(p), un terme p^α apparaît au dénominateur ; la valeur de α est appelée la "**classe**" de la fonction de transfert.

Si on explicite les racines (réelles ou complexes conjuguées) des 2 polynômes constituant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert, on a :

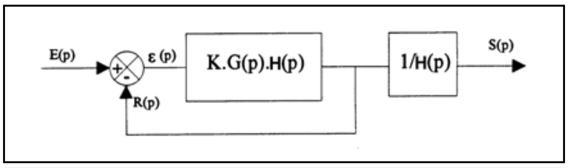
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{B \cdot (p - z_1) \cdot (p - z_2) \cdot ..... \cdot (p - z_m)}{(p - p_1) \cdot ..... \cdot (p - p_i) \cdot ..... \cdot (p - p_n)}$$

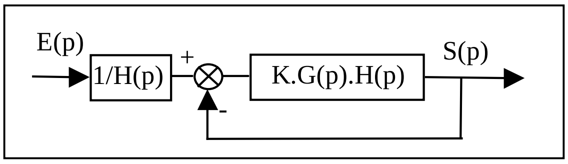
- Les racines zi du numérateur sont appelées "**zéros**" de la fonction de transfert ;
- Les racines pi du dénominateur sont appelées "**pôles**" de la fonction de transfert.

2-2 Systèmes bouclés



Schémas à retour unitaire équivalents :



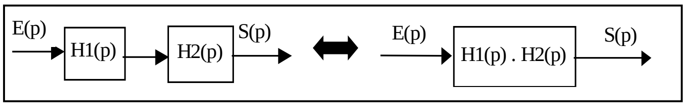


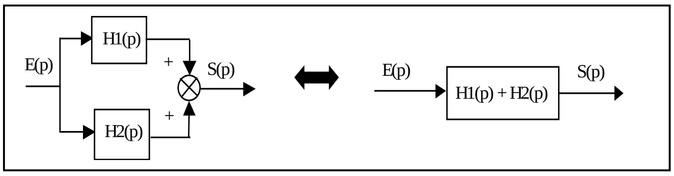
<u>Fonctions de transfert</u> : -de la chaîne directe : K.G(p)

- de la boucle ouverte : FTBO (p) = K.G(p).H(p)
- de la boucle fermée : $\boxed{FTBF(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p) \cdot H(p)}}$

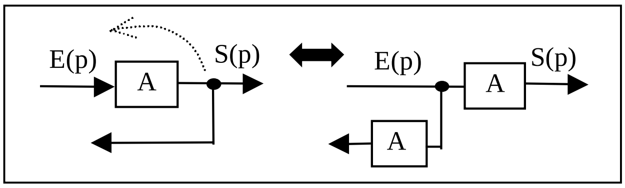
2-3 Association de constituants ; schémas équivalents

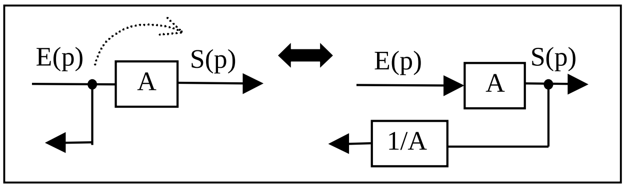
- Constituants placés en série ; en parallèle:



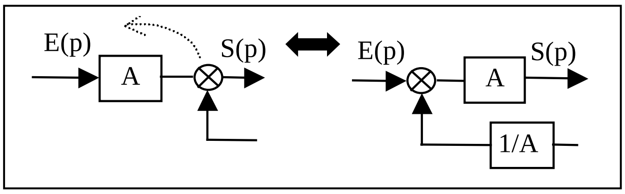


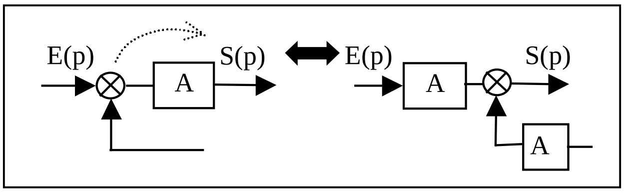
- Déplacement d'un point de prélèvement : vers l'amont ; vers l'aval :





- Déplacement d'un point de sommation vers l'amont ; vers l'aval :

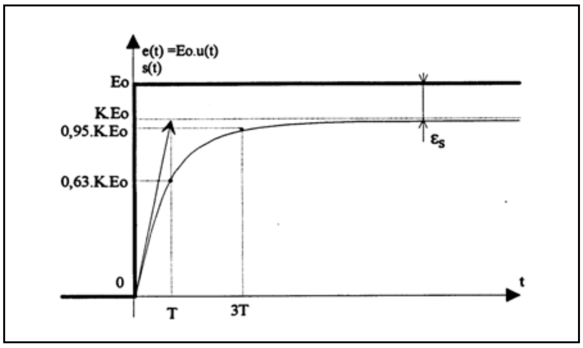


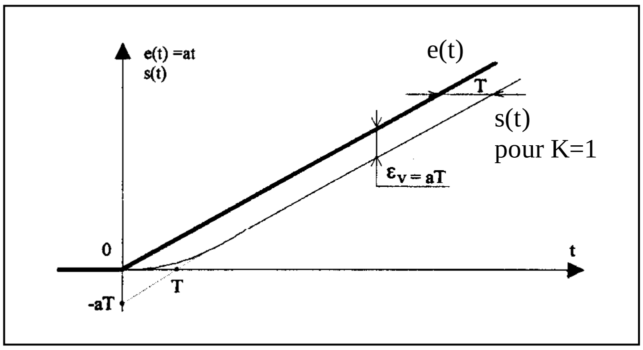


3- La réponse temporelle des systèmes

3-1 Réponse temporelle des systèmes du premier ordre : $\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + Tp}}$

<u>Entrée en échelon : $e(t) = E_0.u(t)$</u> ($E(p) = E_0/p$) <u>Entrée en rampe : $e(t) = a.t$</u> (pente : a) ; ($E(p) = a/p^2$)





T : constante de temps du système

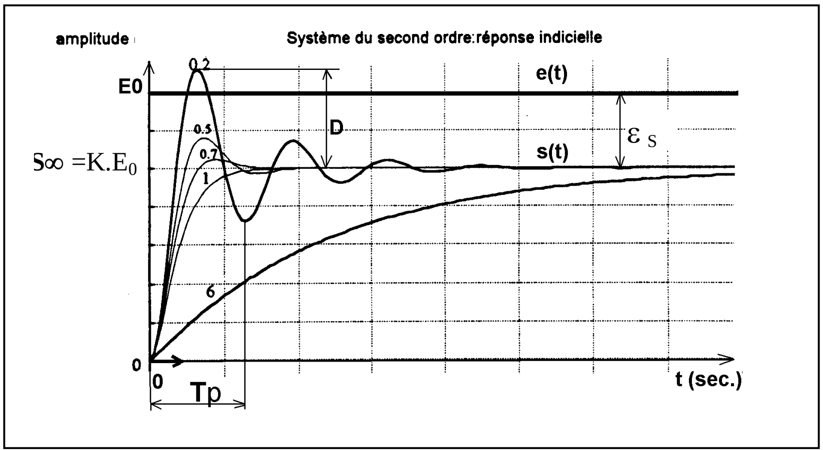
$\boxed{s(t) = K \cdot E_0 \cdot (1 - e^{-t/T})}$

ε_v est l'écart de traînage : $\varepsilon_v = a\,T$ (lorsque K=1)

$\boxed{s(t) = K \cdot a \cdot (t - T + Te^{-t/T})}$

3-2 Réponse temporelle des systèmes du deuxième ordre : $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}\cdot p+\dfrac{1}{\omega_0^2}\cdot p^2}$

Avec z : coefficient d'amortissement ;
ω_0 : pulsation propre non amortie.



<u>Si le dénominateur a 2 racines complexes</u> :
Cas : z < 1 : il y a des oscillations de période $T_p = 2\pi/\omega p$

la pulsation propre est : $\boxed{\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2}}$

le dépassement réel : $D = s_{max} - s_\infty$;
le dépassement pourcent est :

$$\boxed{D1 = \frac{s_{max}-s_\infty}{s_\infty} = e^{-\frac{\pi\cdot z}{\sqrt{1-z^2}}}}$$

4- La réponse fréquentielle des systèmes

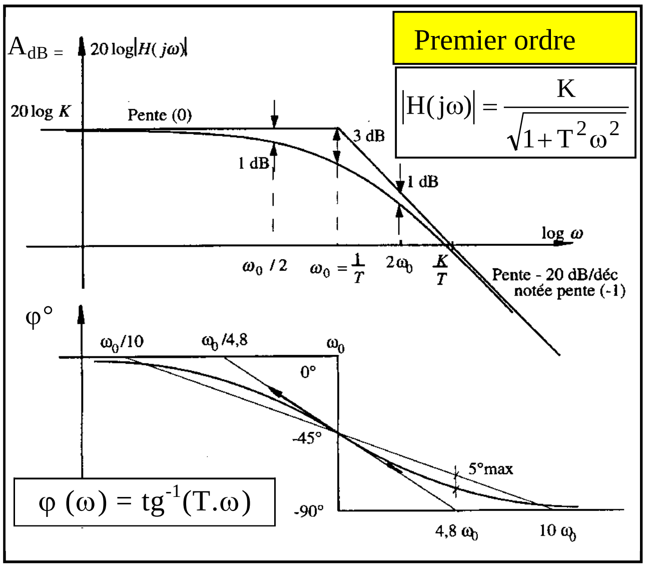
4-1 Généralités : soit un système représenté par la fonction de transfert H(p).

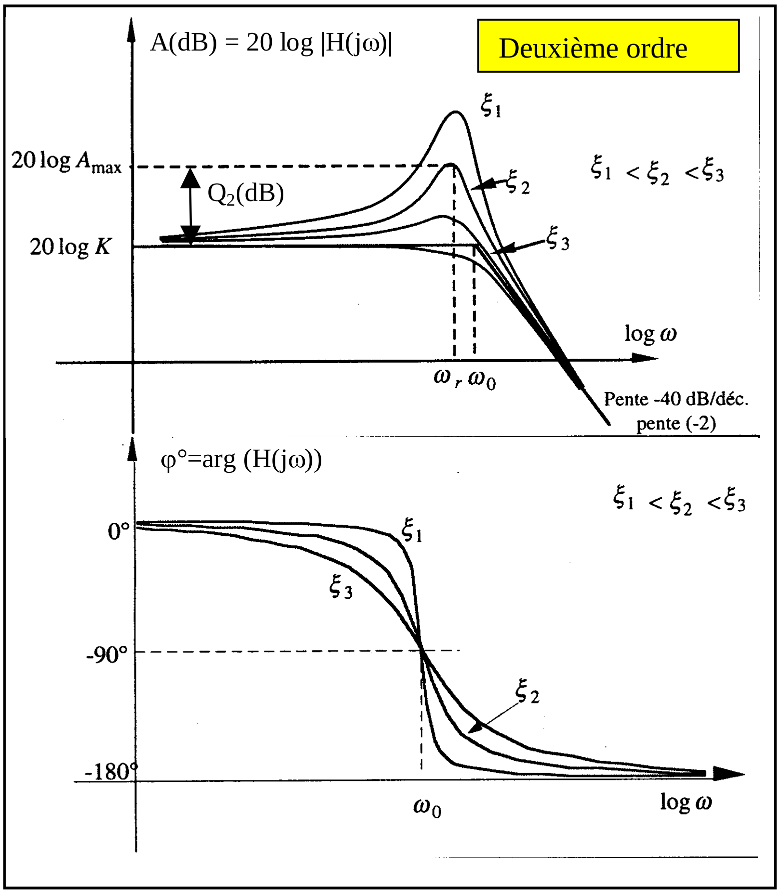
On soumet le système à une entrée $e(t)=E_0\sin(\omega\cdot t)$; On observe la sortie : $s(t)=S_0\sin(\omega\cdot t+\varphi)$

On montre que si on remplace p par $j\cdot\omega$, on a : $H(j\cdot\omega)=\dfrac{S_0}{E_0}\cdot e^{j\cdot\varphi}$; et donc :

le "rapport d'amplitude" : $\boxed{A(\omega)=|H(j\cdot\omega)|=\dfrac{S_0}{E_0}}$ et le déphasage: $\boxed{\varphi(\omega)=\arg(H(j\cdot\omega))}$ de la sortie par rapport à l'entrée

4-2 Réponse fréquentielle des systèmes.





- deuxième ordre :

Si <u>**Z < 0,7 : il y a résonance**</u>

(pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$):

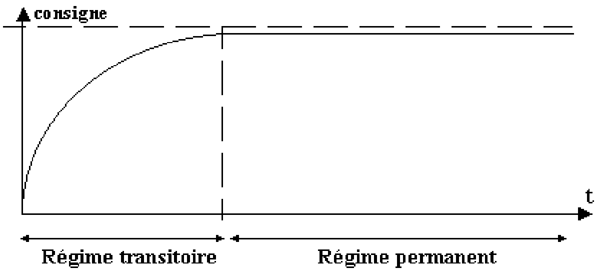
Le coefficient de surtension est alors:

$$\boxed{Q=\frac{|H(j\cdot\omega_r)|}{|H(0)|}=\frac{1}{2\cdot z\cdot\sqrt{1-z^2}}}$$

ou $\boxed{Q_{(dB)} = -20\log(2z\sqrt{1-z^2})}$ en décibels.

5. Théorie des Systèmes :

5.1. Régime Transitoire/ Permanent



REGIME TRANSITOIRE :

Un système est dit en régime transitoire, pendant la durée de passage d'une situation stable à une autre situation stable. Ce régime correspond à une phase de déséquilibre du système. Le régime transitoire n'a pas de caractère périodique.

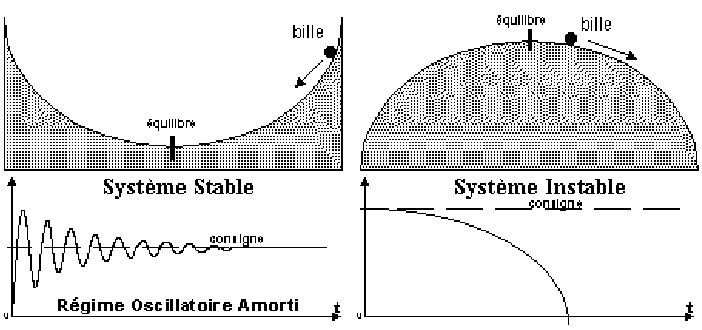
REGIME PERMANENT :

Un système est dit en régime permanent, lorsqu'il entre dans une phase d'équilibre. Son évolution dans le temps reste stable et périodique.

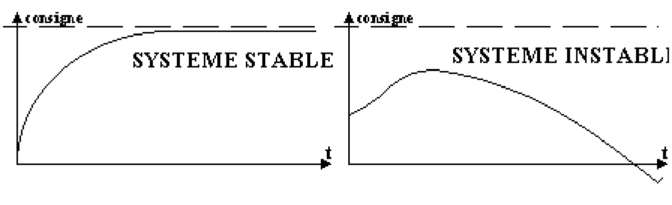
5.2. Stabilité

Sur la figure de gauche, lorsque la bille est lâchée, elle entame un mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre puis se stabilise sur le point d'équilibre: c'est un **système STABLE**.

Sur la figure de droite, lorsque la bille est lâchée, elle entame un mouvement qui l'éloigne du point d'équilibre. Plus elle s'éloigne et plus l'effort qui l'incite à s'éloigner du point d'équilibre augmente : c'est un **système INSTABLE** .

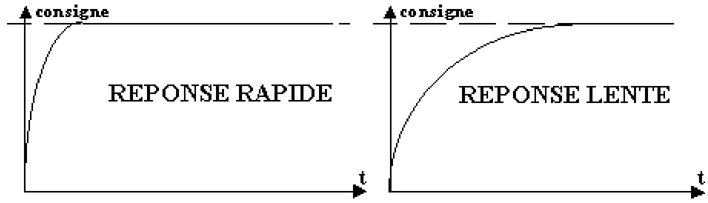


Un système est dit stable lorsqu'il se trouve dans une position d'équilibre autour d'une valeur. Toute tentative de déséquilibre du système aura pour conséquence, un retour naturel de celui-ci dans une position d'équilibre.

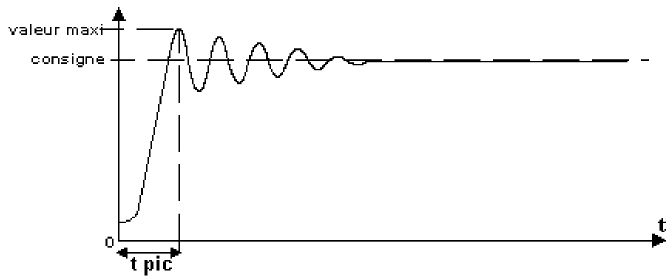


5.3. Temps de Réponse

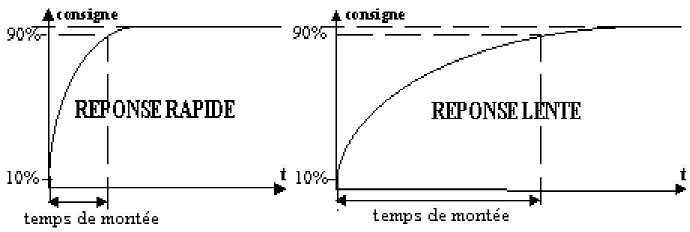
Il existe plusieurs critères pour évaluer la rapidité d'un système régulée.



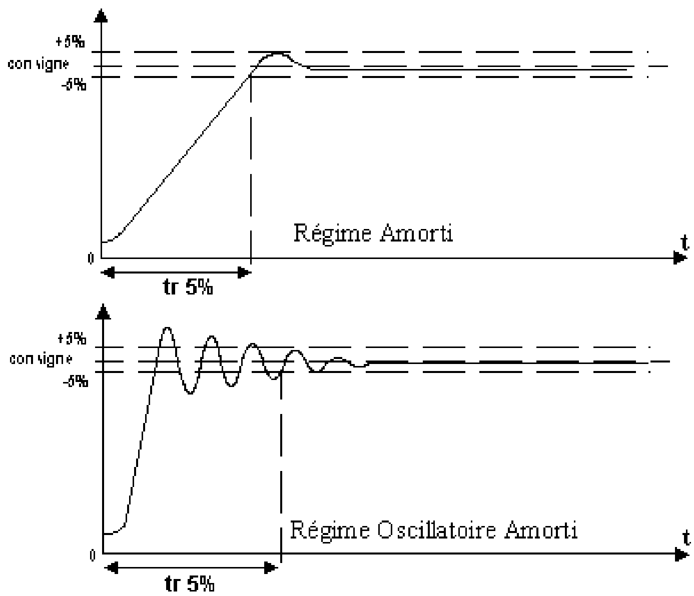
temps de pic : temps nécessaire au système pour atteindre sa valeur maxi



temps de montée : temps nécessaire au système pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale.



temps de réponse : temps nécessaire au système pour entrer dans une bande de x% autour de la valeur finale et ne plus en sortir.



On utilise généralement 2% et 5%