

## CHAPITRE 4 : REPONSE SISMIQUE DE L'OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

### 1. INTRODUCTION :

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à des sollicitations appliquées directement à la masse  $M$ . Une autre forme de sollicitation est celle constituée par un mouvement du support. C'est en particulier le cas de sollicitations provenant par le sol comme les vibrations ambiantes ou les sollicitations sismiques; dans ce cas, le support de l'oscillateur simple représente le sol. Ce chapitre est plus particulièrement consacré à l'étude de la réponse sismique puisque la réponse aux vibrations ambiantes relève du domaine de la dynamique stochastique.

On rappelle brièvement qu'une sollicitation sismique provient d'une rupture s'initiant dans la croûte terrestre; cette rupture donne naissance à des ondes qui se propagent dans le milieu et atteignent éventuellement la surface du sol où elles se manifestent par une vibration ressentie dans les trois directions de l'espace. Les appareils enregistreurs, les sismographes, recueillent ces vibrations sous la forme d'accéléérations du sol en fonction du temps. C'est sous cette forme que la sollicitation du support est définie dans ce chapitre.

### 2. FORMULATION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

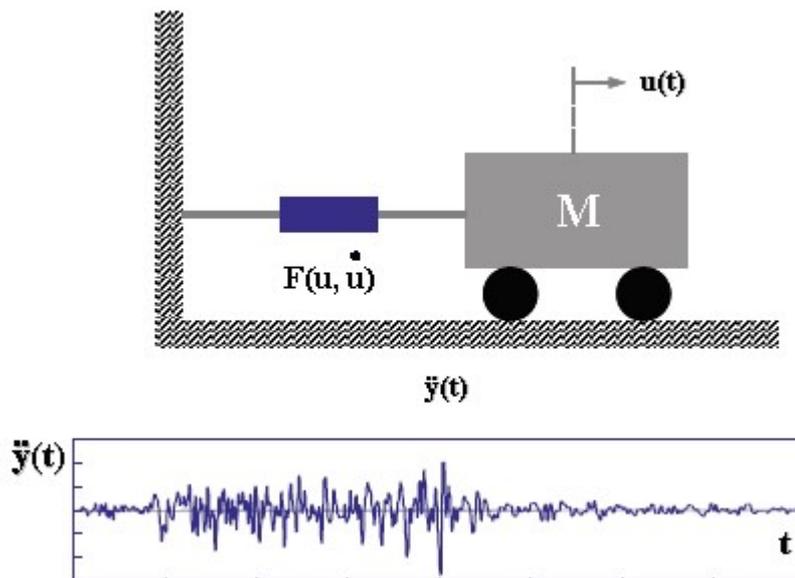


Fig. 1. Excitation sismique de l'oscillateur

La figure 1 schématise le système à étudier. La masse  $M$  repose sur un support soumis à une accélération  $\ddot{y}(t)$  fonction du temps. On supposera, dans un premier temps, que cette accélération est connue par sa variation en fonction du temps.

La masse est reliée à son support par un élément développant une force  $F(u, \dot{u})$  fonction du déplacement et de la vitesse relatifs de la masse par rapport à celui-ci. On considère que cette liaison est de type viscoélastique linéaire et s'écrit :

$$F = k u + c \dot{u} \quad (1)$$

où  $u$  est le déplacement de la masse dans un référentiel lié au support.

L'équation d'équilibre est obtenue par exemple en identifiant les forces s'exerçant sur la masse (figure 2). Ces forces sont constituées par :

- la force de rappel élastique  $f_s = k u$
- la force de rappel de l'amortisseur  $f_d = c \dot{u}$
- la force d'inertie  $f_I$

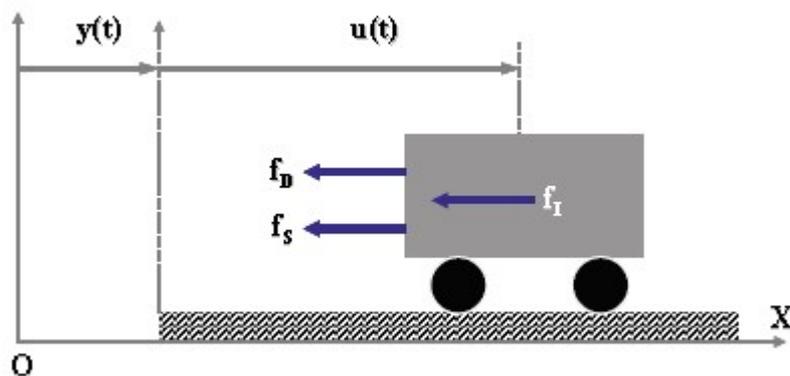


Fig. 2. Forces appliquées à l'oscillateur sismique

La force d'inertie s'exerçant sur la masse est égale au produit de la masse par l'accélération *absolue* de celle-ci.

Dénotant  $v$  le déplacement de la masse dans un référentiel fixe, la règle de composition des mouvements s'écrit :

$$v = u + y \quad \text{où } y \text{ est le déplacement du support.} \quad (2)$$

L'équilibre du système s'obtient en écrivant la nullité de la résultante des efforts, soit :

$$\mathbf{f}_S + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_I = 0 \quad (3)$$

qui en remplaçant les efforts par leurs expressions respectives devient :

$$M(\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{y}}) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme réduite introduite au chapitre 2 :

$$\boxed{\ddot{\mathbf{u}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{u}} + \omega^2\mathbf{u} = -\ddot{\mathbf{y}}(t)} \quad (5)$$

où  $\omega$  et  $\xi$  représentent les caractéristiques de l'oscillateur : pulsation propre et pourcentage d'amortissement critique.

En comparant l'équation (5) à l'équation du mouvement sous forme réduite du chapitre 2, on constate que la réponse sismique de l'oscillateur est analogue à sa réponse lorsqu'il est sollicité directement en introduisant un chargement équivalent :

$$\mathbf{p}_{\text{eff}}(t) = -M\ddot{\mathbf{y}}(t) \quad (6)$$

### 3. REPONSE TEMPORELLE DE L'OSCILLATEUR

L'équivalence donnée par l'équation (6) indique que les solutions obtenues au chapitre 2 restent applicables en remplaçant  $p(t)$  par  $-M\ddot{y}(t)$ .

Ainsi les méthodes d'analyse fréquentielle ou temporelle donnent :

- *Analyse fréquentielle :*

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k H\left(\frac{2\pi k}{T_p}\right) e^{\frac{2i\pi k}{T_p}t} \quad (7)$$

où  $T_p$  est la période fondamentale de la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  rendue périodique et  $\mathbf{C}_k$  les coefficients de Fourier de cette fonction périodique;  $H(\omega_k)$  est la fonction de transfert, complexe, de l'oscillateur donnée par l'équation (II.58).

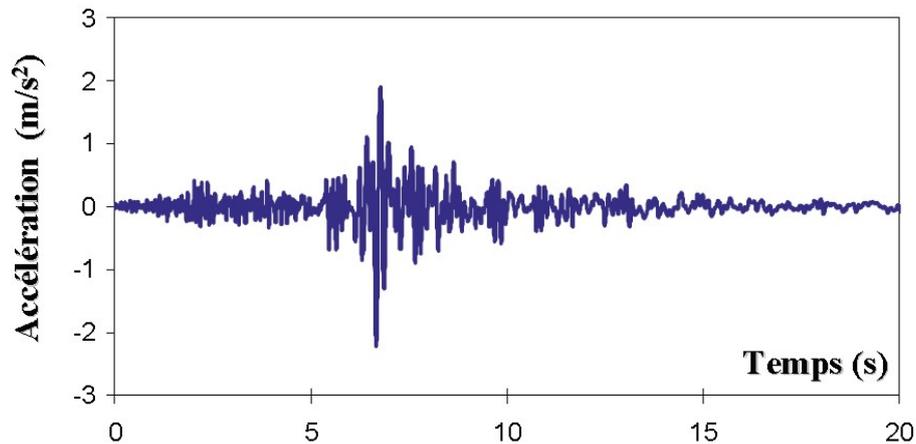
- *Analyse Temporelle :*

L'intégrale de Duhamel donnant la réponse devient :

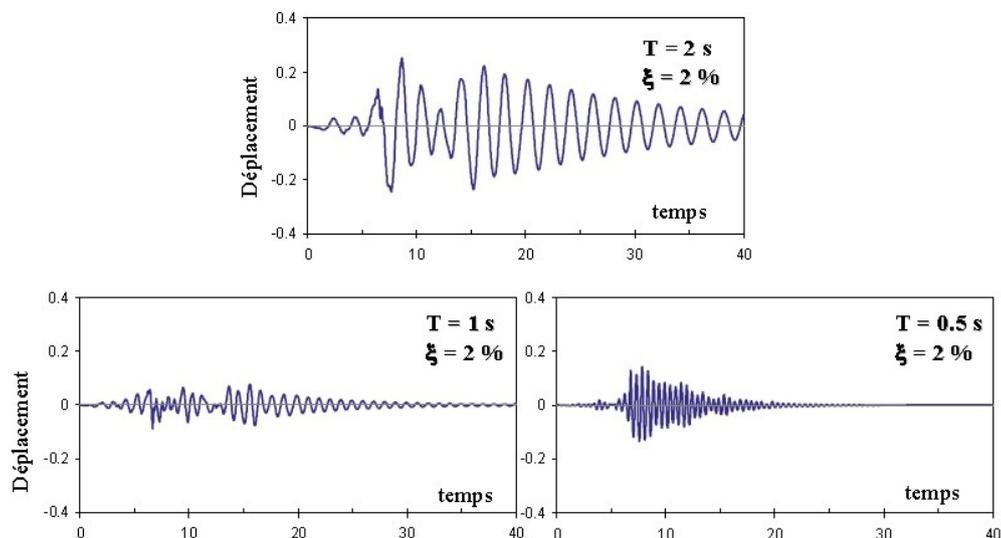
$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (8)$$

Exemple :

Considérons l'accélérogramme enregistré pendant le séisme de Northridge en 1994 (figure 3) et examinons la réponse d'un oscillateur de pourcentage d'amortissement critique fixe, égal à 2%, et de période propre,  $T$ , variable. Cette réponse, calculée par l'intégrale de Duhamel (eq 8) est donnée sur la figure 4.



**Fig. 3. Accélérogramme du séisme (Northridge 1994)**

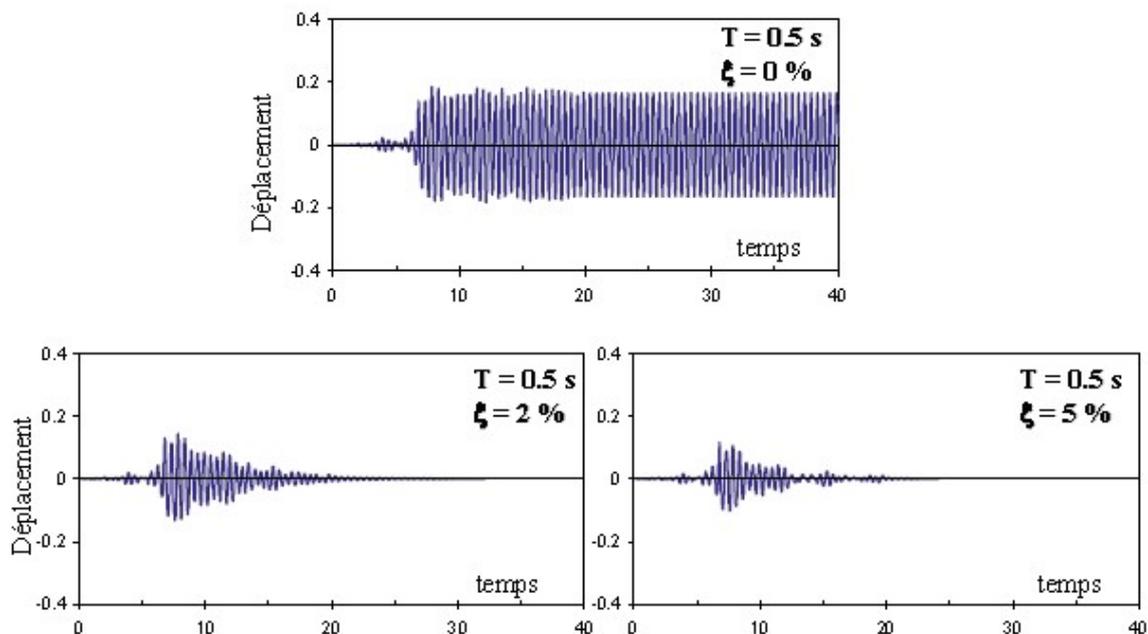


**Fig. 4. Influence de la période propre sur la réponse de l'oscillateur sismique**

L'examen de la figure 4 montre que l'amplitude, la durée et la forme du signal (réponse) dépendent fortement de la période propre de l'oscillateur. Ce résultat est très général pour une sollicitation possédant un large contenu fréquentiel et peut être démontré par la théorie des vibrations aléatoires.

On observe également que parmi les trois oscillateurs, celui avec la période la plus longue possède la réponse en déplacement la plus élevée. Il ne faut cependant pas faire une règle générale de cette constatation qui n'est valable que pour une certaine gamme de périodes, comme on le verra au paragraphe suivant. La comparaison des réponses pour  $T = 0.5$  s et  $T = 1$  s dément d'ailleurs cette proposition.

La figure 5 (ci-après) présente la réponse de l'oscillateur de période fixe égale à 0.5 s et de pourcentage d'amortissement critique variable entre 0% et 5%. Pour le système non amorti, au bout d'une durée correspondant à la phase transitoire de la réponse, la réponse devient stationnaire avec une amplitude constante, la plus élevée des trois systèmes étudiés. Pour un amortissement non nul l'amplitude maximale de la réponse diminue et le mouvement s'atténue d'autant plus rapidement après la phase d'excitation forcée ( $t > 10-15$ s) que le pourcentage d'amortissement critique est élevé. On notera également, qu'hormis le cas  $\xi = 0$ , les réponses présentent une certaine similarité.



**Fig. 5. Influence de l'amortissement sur la réponse de l'oscillateur sismique**

#### 4. CALCUL DES EFFORTS

Une fois la réponse de l'oscillateur déterminée, par exemple par l'équation (8), l'effort élastique dans le système s'obtient simplement par :

$$f_g(t) = k u(t) \quad (9)$$

L'expression de la raideur  $k$  en fonction de la masse de l'oscillateur et de sa pulsation propre permet d'écrire (9) sous la forme :

$$f_g = M \omega^2 u(t) = M A(t) \quad (10)$$

où  $A(t)$  représente une accélération, appelée *pseudo-accélération* de l'oscillateur, à ne pas confondre avec son accélération. Sous la forme (10), on reconnaît que l'effort est donné comme étant le produit de la masse par une accélération.

La pseudo-accélération  $A(t)$  de l'oscillateur est peu différente en valeur absolue de l'accélération absolue de la masse ; la différence provient des forces d'amortissement.

Réécrivant l'expression de l'équilibre dynamique (eq 5) sous la forme :

$$(\ddot{u} + \ddot{y}) = -\omega^2 u - 2\xi \omega \dot{u} \quad (11)$$

On reconnaît l'accélération absolue  $(\ddot{y} + \ddot{u})$  de la masse et sa pseudo-accélération  $\omega^2 u$ . Ces deux grandeurs ne sont égales, et de signe opposé, que lorsque le pourcentage d'amortissement critique est nul.

De façon équivalente, on peut définir une pseudo-vitesse relative de la masse  $V(t)$ , donnée par

$$V(t) = \omega u(t) \quad (12)$$

Les pseudo-vitesse et pseudo-accélération sont reliées au déplacement relatif de la masse par :

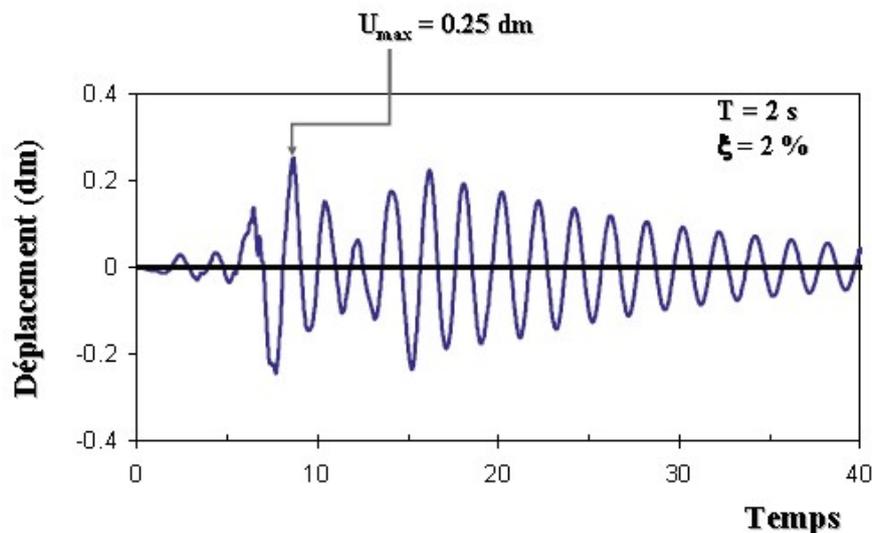
$$\boxed{A = \omega V = \omega^2 u} \quad (13)$$

## 5. RÉPONSE MAXIMALE DE L'OSCILLATEUR

L'équation (8) fournit la réponse de l'oscillateur à tout instant, à partir de laquelle les efforts se développant dans le système peuvent être calculés. Pour le dimensionnement d'une structure, la connaissance de la variation temporelle de l'effort n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la valeur maximale de cette grandeur est requise.

L'introduction de la notion de *spectre de réponse* de la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  permet d'accéder directement à cette grandeur.

Reprenons l'exemple de la figure 4 et examinons la réponse de l'oscillateur de période propre 2s et de pourcentage d'amortissement critique 2% ; cette réponse est donnée sur la figure suivante (Fig. 6).



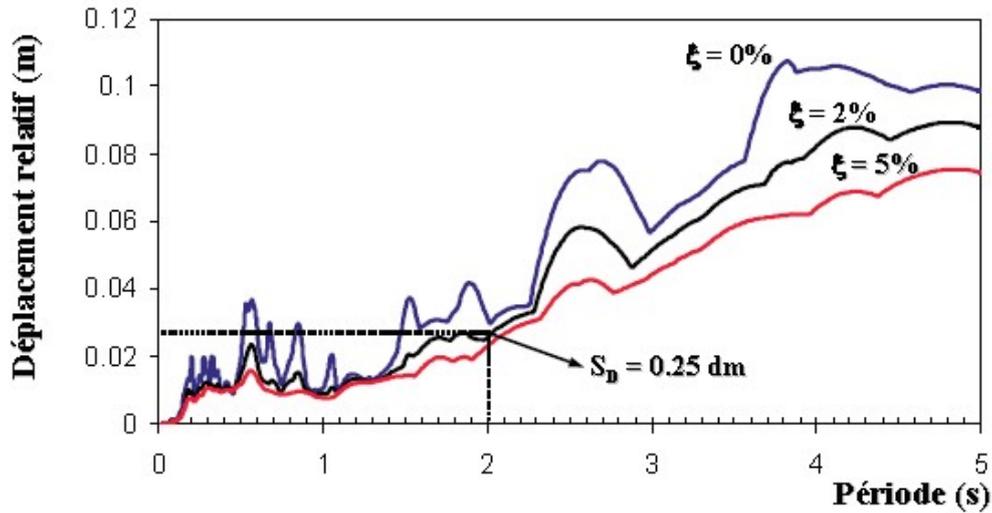
**Fig. 6. Réponse de l'oscillateur sismique  $T = 2s$ ,  $\xi = 2\%$**

La valeur maximale du déplacement de la masse  $M$  intervient au temps  $t = 8.66$  s et vaut 2.5 cm ; rappelons que ce déplacement représente le déplacement relatif de la masse par rapport à son support et non son déplacement absolu.

Il est possible de répéter l'opération précédente pour une collection d'oscillateurs de périodes propres  $T$  et de pourcentages d'amortissement critique variables. Pour chaque réponse, on ne retient que la valeur maximale de déplacement que l'on notera  $S_D$ .

$$S_D(T, \xi) = \max_t u(T, \xi, t) \quad (14)$$

En reportant les valeurs  $S_D$  en fonction de la période  $T$  pour des valeurs fixées de  $\xi$ , on obtient les courbes de la figure 7, appelées *spectres de réponse en déplacement*, sous-entendu d'un oscillateur simple soumis à la sollicitation de la figure 3.



**Fig. 7. Spectres de réponse en déplacement de l'oscillateur sismique**

Ces courbes, établies une fois pour toutes pour une sollicitation  $\ddot{y}(t)$  donnée, permettent d'obtenir directement, sans autre calcul, la réponse maximale de tout oscillateur simple de caractéristiques  $(T, \xi)$  ; ceci est illustré sur la figure 14 pour l'oscillateur  $T = 2s$ ,  $\xi = 2\%$  de la figure 6.

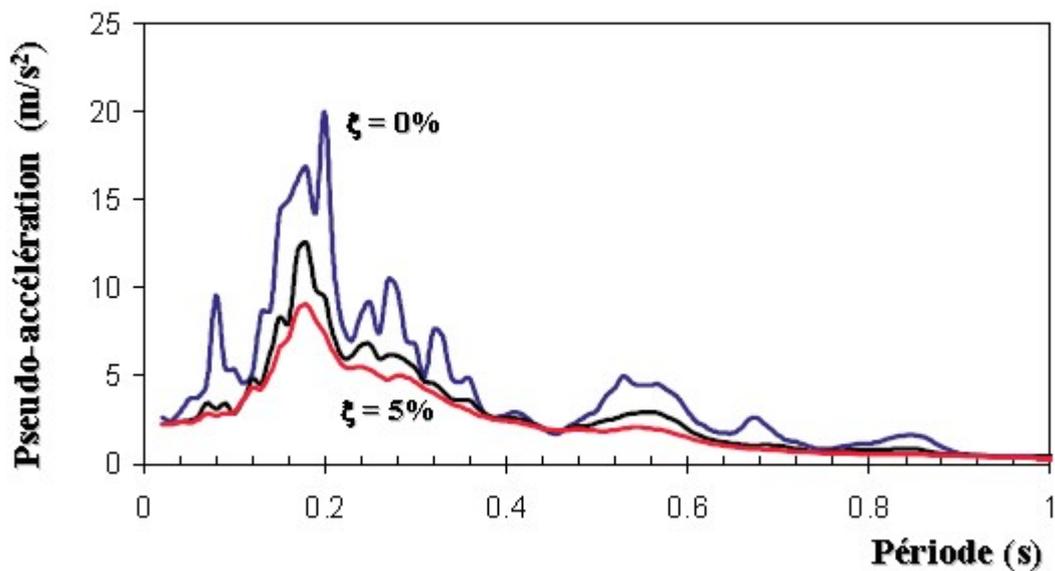
On a vu au paragraphe 4.0 que les efforts élastiques dans le système pouvaient être obtenus à partir du produit de la masse par la pseudo-accélération. Il est donc intéressant d'introduire un spectre de réponse en pseudo-accélération  $S_A(T, \xi)$ , défini par :

$$S_A(T, \xi) = \max_t \left[ \omega^2 u(T, \xi, t) \right] = \omega^2 S_D(T, \xi) \quad (15)$$

De même, on peut définir un spectre de pseudo-vitesse relative  $S_V(T, \xi)$ . Ces grandeurs sont reliées (de façon analogue à l'éq. 13) par :

$$S_A(T, \xi) = \omega S_V(T, \xi) = \omega^2 S_D(T, \xi) \quad (16)$$

Les spectres de la figure 7 sont présentés sur la figure 8 en termes de pseudo-accélération calculée par la relation (eq 16).



**Fig. 8. Spectres de réponse en pseudo-accelération**

Il convient de réaliser que les figures 7 et 8 contiennent la même information qui caractérise la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  de la figure 3.

Une fois connu le spectre de réponse en pseudo-accelération, l'effort élastique maximal développé dans l'oscillateur est donné par :

$$f_{g_{\max}} = M S_A(T, \xi) \quad (17)$$

## 6. SPECTRES DE RÉPONSE NORMALISÉS

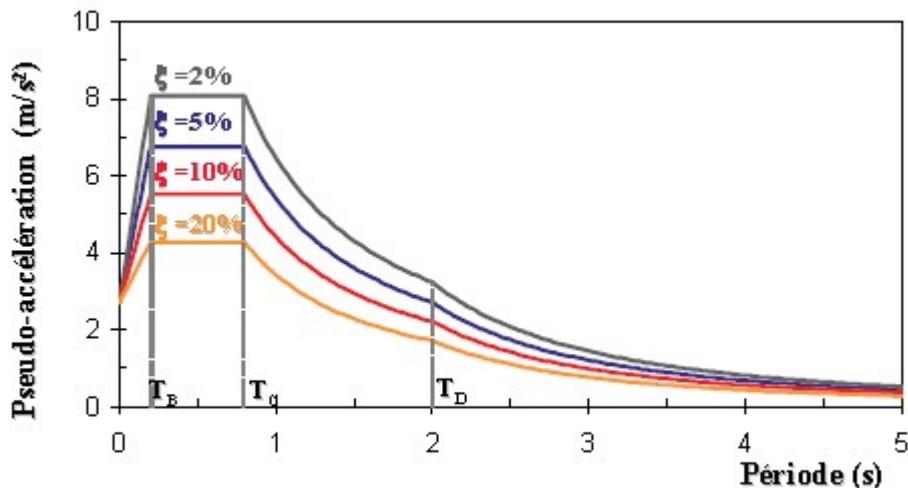
Le paragraphe précédent a montré que si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure afin de déterminer les efforts maximaux qui s'y développent, la connaissance de la variation temporelle  $\ddot{y}(t)$  de l'accélération du sol n'est pas nécessaire. Seul le spectre de réponse en pseudo-accelération (ou déplacement relatif) est requis.

L'introduction de cette grandeur permet de définir, dans une zone sismique, une sollicitation enveloppe pour le système, ce que ne permet pas de faire la donnée  $\ddot{y}(t)$ . En effet, tant du point de vue du contenu fréquentiel que du point de vue des amplitudes, la variabilité du mouvement sismique est grande et parmi un ensemble de sollicitations  $\ddot{y}_i(t)$ , une sollicitation  $\ddot{y}_j(t)$  peut être la plus défavorable pour une structure, alors que pour une autre structure la sollicitation la plus défavorable sera représentée par  $\ddot{y}_k(t)$ .

Par contre, en calculant les spectres de réponse  $S_{Ai}(T, \xi)$  de ces sollicitations, il est possible de définir un spectre enveloppe qui, en vertu de l'équation (17), conduira aux efforts les plus élevés.

Il est cependant important de réaliser que ce spectre enveloppe n'est représentatif d'aucun mouvement sismique  $\ddot{y}_i(t)$  et il est vain de rechercher dans une banque de données de séismes enregistrés, un enregistrement possédant un spectre de réponse identique, ou même voisin, d'un spectre enveloppe.

Par contre, la définition d'un spectre enveloppe est très utile pour les règlements de construction parasismique. Ces spectres  $y$  sont définis à partir de traitements statistiques des spectres d'enregistrement réels et possèdent généralement tous des formes identiques (figure 9).

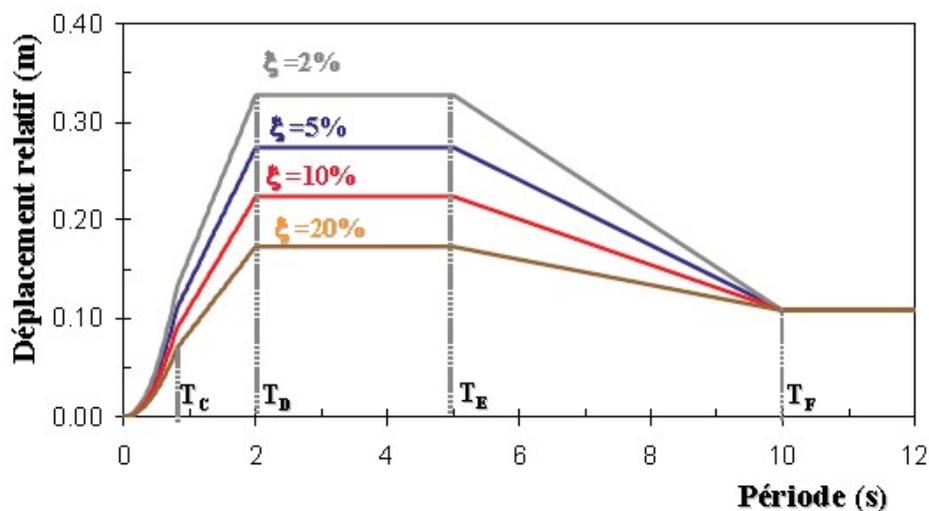


**Fig. 9. Spectres de réponse normalisés**

- Pour les faibles périodes, la pseudo-accelération croît linéairement jusqu'à une valeur d'amplification maximale atteinte pour une période  $T_B$  ;
- La pseudo-accelération est constante et maximale pour des périodes comprises entre  $T_B$  et au plus  $T_C$  ;
- Entre les périodes  $T_C$  et  $T_D$ , la pseudo-vitesse relative est constante, ce qui signifie que la pseudo-accelération décroît en  $1/T$  (équation 16) ;
- Au delà de  $T_D$ , le déplacement relatif est constant, ce qui signifie que la pseudo-accelération décroît en  $1/T^2$  (équation 16).

Il est intéressant d'examiner les deux extrémités du spectre, à période nulle et à période infinie:

- A période nulle, la pseudo-accélération est égale à l'accélération maximale du support, comme le montre l'équation (5) lorsque  $\omega = \infty$  ; le déplacement relatif  $u$  devient nul. Quelle que soit la valeur de l'amortissement, tous les spectres se raccordent à période nulle à l'accélération maximale  $\max[\ddot{y}(t)]$  ;
- A période infinie, le déplacement relatif  $S_D(\infty, \xi)$  tend vers le déplacement maximal du support  $\max[y(t)]$  . Ce résultat s'explique aisément : un oscillateur de période infinie correspond à un système avec une raideur nulle : tout se passe comme si la masse n'était plus connectée au support; par suite, lors de l'excitation de celui-ci, elle reste immobile. Son mouvement relatif par rapport au support est donc égal au mouvement du support. En pratique, l'examen des spectres de réponse d'enregistrements réels montre que la réponse devient égale au déplacement du sol pour des périodes  $T_F$  de l'ordre de 10s.



**Fig. 10. Spectres de réponse en déplacement**

Les spectres en pseudo-accélérations de la figure 9 peuvent être tracés en termes de déplacement relatif par la transformation (16) (figure 10). Sous cette forme, les considérations générales développées au paragraphe 3.0, relatives à la réponse de divers oscillateurs, s'explicitent ; on constate en particulier que les oscillateurs de périodes élevées, comprises entre  $T_D$  et  $T_E$  présentent les valeurs maximales.