CHAPITRE 3 : OSCILLATEUR SIMPLE GENERALISÉ

1. INTRODUCTION

L'étude de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté ne se restreint pas à l'étude d'un système masse-ressort-amortisseur tel qu'il a été décrit au chapitre 2. Il existe des exemples d'assemblage complexe de corps rigides dont les conditions aux limites sont telles que les mouvements possibles de l'assemblage pouvaient être décrits par l'amplitude du déplacement en un point du système. Moyennant l'introduction de grandeurs généralisées (masse m*, raideur k*, amortisseur c* et chargement p*), l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique du système se ramenait à celle de l'oscillateur à 1 degré de liberté. Ce concept peut être généralisé à l'étude de systèmes possédant une flexibilité distribuée sur l'ensemble de la structure, comme par exemple une poutre en flexion.

En toute théorie, la poutre possède un nombre infini de degrés de liberté (voir chapitre 1), cependant en admettant que la déformée de la poutre ne peut prendre qu'une forme unique, il est possible de ramener l'étude de cette structure à celle d'un oscillateur à 1 degré de liberté.

Cette méthode, alliée à un choix pertinent de la forme pré-supposée de la déformée, se révèle fructueuse pour l'obtention de solutions approchées de la réponse vibratoire. La méthode sera illustrée sur l'exemple simple d'une poutre console (figure 1), mais est d'application plus générale.

2. FORMULATION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT (équation d'équilibre dynamique)

La poutre console de la figure 1 est caractérisée par une rigidité en flexion **EI(x)** variable sur sa hauteur, et une masse représentée par une variation $\overline{m}(x)$ de la masse linéique.

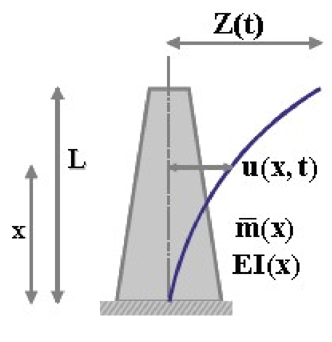

Fig. 1. Poutre Console

Ce système (Fig. 1) possède une infinité de degrés de liberté représentés par le déplacement horizontal et la rotation de tout point M de la fibre neutre. Pour ramener ce système à un oscillateur à 1 degré de liberté, il est nécessaire de supposer que la déformée de la poutre s'exprime à l'aide d'une fonction unique $\boldsymbol{\Psi(x)}$ et que l'amplitude du déplacement d'un point quelconque de la poutre s'exprime par :

$$u(x,t) = \psi(x)\, Z(t) \tag{III.1}$$

où Z(t) représente la variation temporelle du déplacement. Z(t) est appelée coordonnée généralisée. Typiquement Z(t) est choisi comme étant le déplacement d'un point particulier de la poutre, par exemple son extrémité supérieure. L'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de ce système peut être obtenue à partir du principe des puissances virtuelles.

Soit p(x,t) la distribution des efforts extérieurs appliqués le long de la poutre; pour toute vitesse virtuelle, $\delta \hat{u}$, la puissance des efforts extérieurs, intérieurs, et la puissance des quantités d'accélérations sont donnée par (en tenant compte de l'éq. III.1) :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_e(\delta\hat{u}) &= \int_0^L p(x,t)\,\psi(x)\,\delta\hat{Z}\,dx = p^*\,\delta\hat{Z} \\
\mathscr{P}_i(\delta\hat{u}) &= -\int_0^L EI(x)\left[\psi''(x)\right]^2 Z(t)\,\delta\hat{Z}\,dx = -k^*\,Z(t)\,\delta\hat{Z} \\
\mathscr{A}(\delta\hat{u}) &= \int_0^L \bar{m}(x)\left[\psi(x)\right]^2 \ddot{Z}(t)\,\delta\hat{Z}\,dx = m^*\,\ddot{Z}(t)\,\delta\hat{Z}
\end{aligned} \tag{III.2}$$

L'expression du principe des puissances virtuelles

$$\mathscr{P}_i(\delta\hat{u}) + \mathscr{P}_e(\delta\hat{u}) = \mathscr{A}(\delta\hat{u}) \tag{III.3}$$

Valable pour toute vitesse virtuelle $\delta\hat{Z}$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{m^*\ddot{Z}(t) + k^*\,Z(t) = p^*(t)} \tag{III.4}$$

Dans laquelle on reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté. La pulsation propre de cet oscillateur est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \tag{III.5}$$

Exemple :

Considérons la poutre de la figure 1 avec des propriétés constantes sur la hauteur :

$$EI(x) = EI \quad , \quad \bar{m}(x) = m \tag{III.6}$$

et pour laquelle l'excitation s'exprime par : $P(x,t) = \bar{P}\zeta(t)$

Les conditions aux limites sont telles que la poutre est encastrée à sa base. Ces conditions s'expriment par :

- déplacement nul à la base $\Psi(0) = 0$
- rotation nulle à la base $\Psi'(0) = 0$

A ce stade, il est possible de choisir toute fonction Ψ(x) vérifiant ces conditions aux limites.
En choisissant par exemple :

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{III.7}$$

on vérifiera aisément en utilisant les définitions de p*, k*, m* données par les relations (III.2) que l'équation d'équilibre s'écrit :

$$0.227 m L \ddot{Z}(t) + \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3} Z(t) = 0.363 L \bar{p}\, \zeta(t) \tag{III.8}$$

Avec :

P*=……………………………………….……………………………………..

…………………………………………..……………………………………..

K*=…………………………………..………………………………………..

…………………………………………..……………………………………..

m*=……………………………………..………………………………………..

…………………………………………..……………………………………..

De l'équation précédente, on déduit immédiatement que la pulsation propre de l'oscillateur est donnée par :

$$\omega = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \textbf{Avec} \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\pi^4}{32 \cdot 0.228}} \; : \tag{III.9}$$

Il convient de réaliser que la valeur de la pulsation propre calculée par (3.16) dépend totalement de la forme de la déformée $\Psi(x)$. Si un autre choix, respectant les conditions aux limites, était fait, une valeur différente serait obtenue. Par exemple en choisissant pour la déformée $\Psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{L^3} \tag{III.10}$$

Devoir N°2 :

Quelle la valeur de la quantité λ pour le choix de la déformé (III.10), (Avec développement mathématique).

L'introduction de coordonnées généralisées a permis de réduire un système à un nombre infini de degrés de liberté à un oscillateur simple pour lequel la pulsation propre est calculée par l'équation (III.5).

Ce résultat pour la pulsation propre peut être obtenu de façon équivalente par des considérations énergétiques. Elle est connue sous le nom de ***méthode de Rayleigh***.

Pour un système conservatif isolé, la somme de l'énergie potentielle V et de l'énergie cinétique T est constante. Lorsque l'énergie potentielle est maximale, l'énergie cinétique est nulle. De même, lorsque l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est nulle. La conservation de l'énergie totale implique donc :

$$V_{max} = T_{max} \tag{III.11}$$

Ce qui conduit à l'écriture finale des énergies potentielle et cinétique, après considération des écritures du déplacement et vitesse :

$$V_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \int_0^L EI(x) \left[\psi''(x)\right]^2 dx \qquad \text{(III.12)}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \,\omega^2 \int_0^L \bar{m}(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx$$

et tenant compte de la relation (III.11), on en déduit la pulsation propre (au carré) :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) \left[\psi''(x)\right]^2 dx}{\int_0^L \bar{m}(x) \left[\psi(x)\right]^2 dx} = \frac{k*}{m*} \qquad \text{(III.13)}$$

dans laquelle on reconnaît au numérateur l'expression de la raideur (rigidité) généralisée et au dénominateur celle de la masse généralisée (équations III.2).

3. CHOIX DU MODE DE VIBRATION

Comme on l'a indiqué précédemment, la déformée $\Psi(x)$ peut être arbitraire pour autant qu'elle respecte les conditions aux limites du système. A chaque choix de $\Psi(x)$ correspond une valeur de la pulsation propre ω. Toutefois, toute déformée qui ne correspond pas au mode de vibration exact du système conduit à une valeur de ω supérieure à la valeur exacte.

En conséquence, la meilleure approximation pour $\Psi(x)$ est celle qui donne la valeur minimale la plus proche de ω. Dans le cas des vibrations libres, la déformée calculée avec un chargement $p(x) = m(x)\Psi(x)$, où $\Psi(x)$ représente une déformée raisonnable, fournira une excellente approximation de la solution.