II.5. VIBRATIONS FORCÉES D'UN SYSTEME LINEAIRE A 1 DDL

Dans cette section, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation P(t) directement appliquée à la masse M. On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique.

1- SOLLICITATION HARMONIQUE

La sollicitation appliquée p(t) est décrite par une expression :

$$p(t) = p_0 \sin(\overline{\omega} t) \tag{II.39}$$

L'équation générale dont on recherche la solution s'écrit :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0}{M}\sin(\overline{\omega} t) \tag{II.40}$$

La solution générale s'écrit sous la forme de la solution générale de l'équation homogène (Sans second membre i.e. Vibrations Libres), soit :

$$u(t) = A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t) \tag{II.41}$$

et d'une solution particulière que l'on recherchera sous la forme :

$$u_1(t) = \lambda\sin(\overline{\omega} t) + \mu\cos(\overline{\omega} t) \tag{II.42}$$

La solution Générale peut être obtenue en reportant les solutions (homogène et particulière) dans l'équation du mouvement sous forme réduite, et en identifiant les constantes (λ, μ) :

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t}\left[A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)\right]}_{\text{Solution Transitoire}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin(\overline{\omega} t) - 2\xi\beta\cos(\overline{\omega} t)\right]}_{\text{Solution Stationnaire}} \tag{II.43}$$

Avec : $\beta = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$ le rapport entre la pulsation de la charge extérieure et la pulsation propre du système

Le premier terme de l'équation de la solution générale constitue la réponse transitoire de l'oscillateur qui représente le cas des vibrations libres du système sous amorti, et le second la réponse forcée ou stationnaire (régime Permanant) :

La réponse transitoire s'amortit au cours du temps, d'autant plus rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé et la réponse tend vers la solution stationnaire. Cette réponse s'effectue alors avec une période $T = 2\pi/\varpi)$ égale à celle de la sollicitation.

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales ,vitesse et déplacement du système, à l'instant t = 0,.

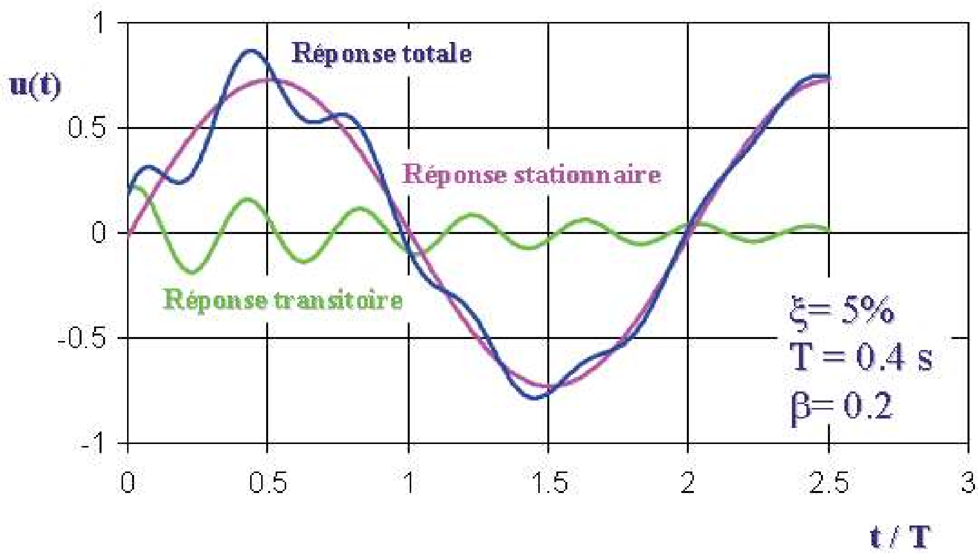

Fig. II.10 ***(Réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique)***

Pour un système même faiblement amorti ($\zeta \approx 5\%$), <u>dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période de vibration propre T = = $2\pi/\omega$) de l'oscillateur, la contribution de la réponse transitoire peut être négligée.</u> La réponse stationnaire peut alors s'écrire, de façon similaire au cas des vibrations libres:

$$u(t) = \rho \sin(\varpi t - \theta) \qquad \text{II.44}$$

où ρ représente l'amplitude de la réponse et θ la phase qui caractérise le déphasage entre l'effort appliqué (la charge extérieure) et le déplacement résultant.

L'amplitude de la réponse (<u>le déplacement maximal</u>) est égale à :

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k} D \qquad \text{II.45}$$

P_0/k représente le déplacement statique (à fréquence nulle) de la masse M lorsque la sollicitation vaut P_0 et D le facteur d'amplification dynamique.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la figure ci-dessous en fonction du rapport β. Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique.

Lorsque ϖ tend vers l'infini, D tend vers 0 quelle que soit la valeur de ζ .

A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique f_s et d'amortissement f_D, elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

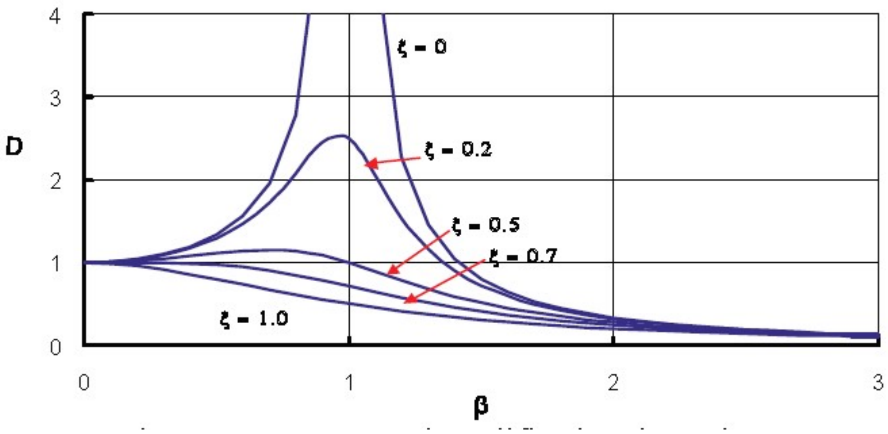

Fig. II.11 (*Facteur d'amplification dynamique*)

Lorsque la pulsation de la sollicitation (ϖ) coïncide avec la pulsation propre ω de l'oscillateur, le facteur d'amplification D passe par un maximum égal à:

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi} \qquad \text{II.46}$$

Ce phénomène est connu sous le nom **de résonance**. Lorsque l'amortissement est nul (système non amorti), D_{max} devient infini.

Reprenant l'étude de l'équation de la solution générale, la phase θ est donnée par :

$$\theta = \mathrm{Arctg}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \qquad \text{II.47}$$

Elle est représentée sur la figure ci-après en fonction de β.

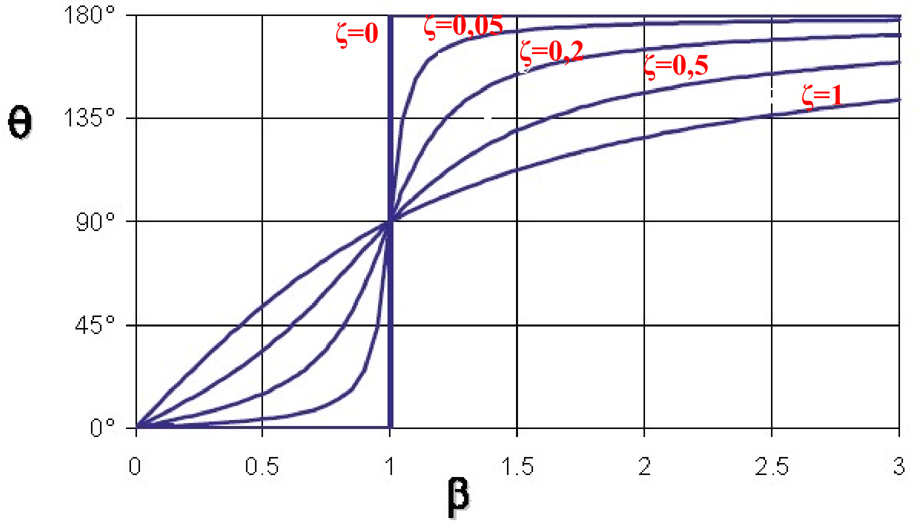

Fig. II.12 (*La Phase de la réponse stationnaire)*

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation.

Lorsque la résonance est atteinte (ß=l), il se produit un déphasage de 90° entre la force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa.

A haute fréquence, le déplacement est maximal, en valeur absolue au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force. Rappelons que corrélativement, comme on l'a vu précédemment, son amplitude tend vers 0.

2. ETUDE DE RESONANCE :

On a vu que pour l'oscillateur simple, lorsque la pulsation de la sollicitation coïncidait avec la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse, en termes de déplacement, passait par un maximum qui pouvait être infini si l'amortissement de l'oscillateur était nul.

Pour l'oscillateur soumis à des conditions initiales nulles en déplacement et vitesse, u(0) =u̇(0) = 0, la réponse globale s'écrit :

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_D t)+\cos(\omega_D t)\right)e^{-\xi\omega t}-\cos(\omega t)\right] \qquad A=\frac{p_0}{k}\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \qquad B=\frac{p_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

II.48

qui se simplifie pour les faibles valeurs de ξ et un temps t suffisamment élevé en :

$$u(t)=\frac{P_0}{2k\xi}\left(e^{-\xi\omega t}-1\right)\cos(\omega t) \qquad \text{II.49}$$

Lorsque le système est non amorti, le passage à la limite de l'équation de la réponse globale pour ξ→ 0 donne pour réponse :

$$u(t)=\frac{P_0}{2k}\left[\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)\right] \qquad \text{II.50}$$

La figure ci-dessous présente l'évolution dans le temps des réponses données par les équations du cas faiblement amorti et l'équation pour le système non amorti :

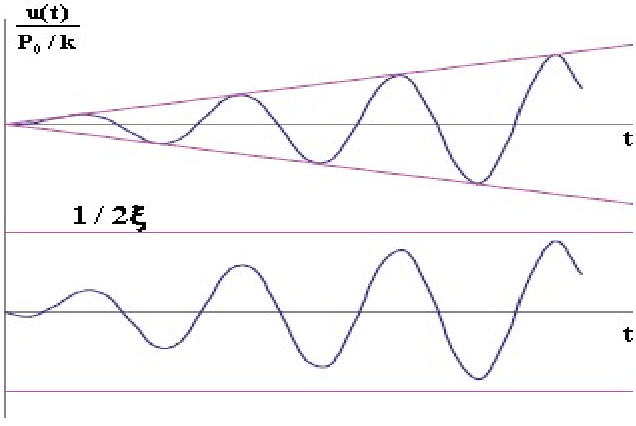

Fig. II.13 **Evolution de l'amplitude d'un système en résonance**

Pour le système non amorti, l'amplitude de la réponse croît d'une quantité π à chaque cycle et tend vers l'infini : le système devient instable.

Pour le système, même faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croît dans le temps mais reste bornée par la valeur ($P_0/2k\xi$) qui est atteinte d'autant plus rapidement que l'amortissement est élevé. La borne obtenue pour l'amplitude du déplacement est égale à celle de la réponse stationnaire à la résonance de l'oscillateur ($D_{max}=1/2\xi$).

3. SOLLICITATION IMPULSIVE

La sollicitation consiste en une impulsion appliquée soudainement à l'instant $t = \tau$:

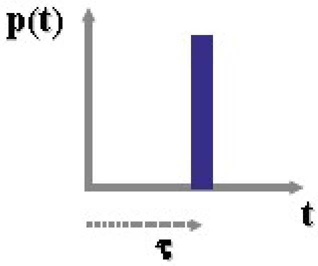

Fig. II.14 **Sollicitation Impulsive**

L'étude de la sollicitation impulsive revêt une importance toute particulière car, elle constitue la solution fondamentale élémentaire de la réponse de l'oscillateur, toute sollicitation générale pouvant être considérée comme une succession d'impulsions élémentaires.

Mathématiquement, la sollicitation impulsive est représentée par la fonction de Dirac δ égale à l'infini au temps $t=\tau$ et nulle pour les autres valeurs du temps, mais dont l'intégrale, appelée *impulsion*, est égale à l'unité :

$$p(t) = \delta(t-\tau)$$

II.51

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt$$

D'après l'équation fondamentale de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement de la masse M est égale à la résultante des forces appliquées, soit :

$$\frac{d}{dt}(M\dot{u}) = p(t) - k\,u(t) - c\dot{u}(t) \qquad \text{II.52}$$

Si la force p(t) agit pendant une durée infiniment brève, le ressort et l'amortisseur n'ont pas le temps de développer des forces et les deux derniers termes du membre de droite de la dernière équation sont nuls. Par intégration de cette équation, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = M\,\Delta\dot{u} \qquad \text{II.53}$$

$\Delta\dot{u}$: représente la variation de vitesse communiquée à la masse M.

Pour un système initialement au repos **(u = 0)** , tenant compte de II.51

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} \qquad \text{II.54}$$

Par ailleurs, pour $t \leq \tau$, le déplacement est nul, soit $u(\tau) = 0$:

Ces Deux relations constituent les conditions initiales de la réponse vibratoire De l‘ oscillateur soumis à une impulsion unité à l'instant $t = \tau$.

Pour les temps $t > \tau$ la réponse de l'oscillateur correspondra à sa vibration libre, étudiée précédemment. Son déplacement u(t) sera régi par sa forme exponentielle dans laquelle les conditions initiales sont introduites :

$$\boxed{u(t) \equiv h(t-\tau) = \frac{1}{m\,\omega_D}\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\left[\omega_D (t-\tau)\right]} \quad \text{valable pour } t \geq \tau. \qquad \text{II.55}$$

$h(t-\tau)$ constitue la solution élémentaire pour une impulsion unité intervenant à l'instant $t = \tau$.

Physiquement, une impulsion de durée nulle n'existe pas et toute impulsion a une durée finie t_1, très courte. Sa variation temporelle pendant la durée t, peut-être, par exemple sinusoïdale, triangulaire ou être représentée par un créneau (figure ci-après). Ces situations se rencontrent par exemple dans le cas d'un choc mou, d'une explosion ou d'un choc dur.

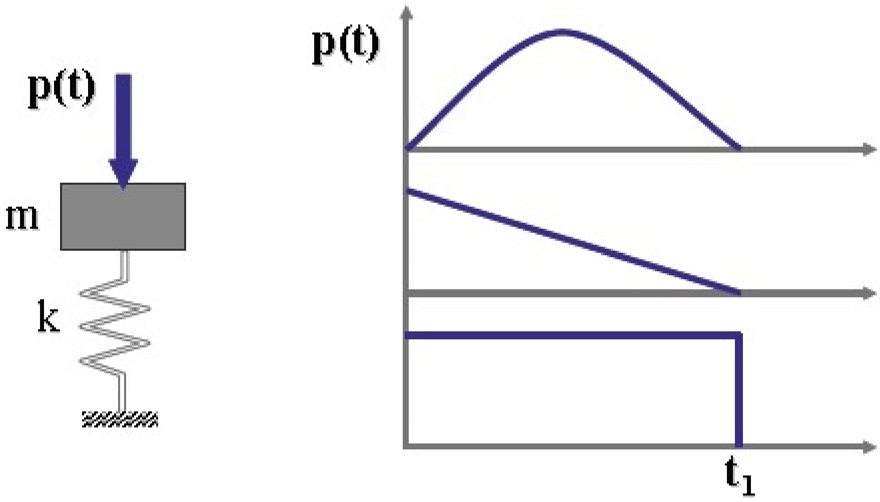

Fig. II.15 **Exemple d'impulsion**

Pour ces sollicitations, une solution analytique explicite peut être obtenue pour la réponse de l'oscillateur. Cependant il est plus fécond de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur. Cette réponse peut se produire pendant la durée de l'impulsion ou pendant la phase de vibration libre après la fin de l'impulsion.

Dans tous les cas, la réponse maximale est atteinte très rapidement et les forces d'amortissement n'ont pas le temps nécessaire pour absorber une énergie significative; il est donc licite de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur non amorti (figure ci-dessus). Pour une force d'amplitude maximale p_0, on écrira que le déplacement maximal est égal à :

$$\max_t u(t) = \frac{p_0}{k} D \qquad \text{II.56}$$

où D représente le coefficient d'amplification dynamique maximal. De façon générale, quelle que soit la forme de l'impulsion, D ne dépend que du rapport t_1/T de la durée de l'impulsion à la période propre de l'oscillateur. On peut donc représenter la variation de D en fonction de ce paramètre. La figure suivante présente cette variation pour les trois types d'impulsion de la figure précédente. Un graphique de ce type est dénommé ***spectre de choc***.

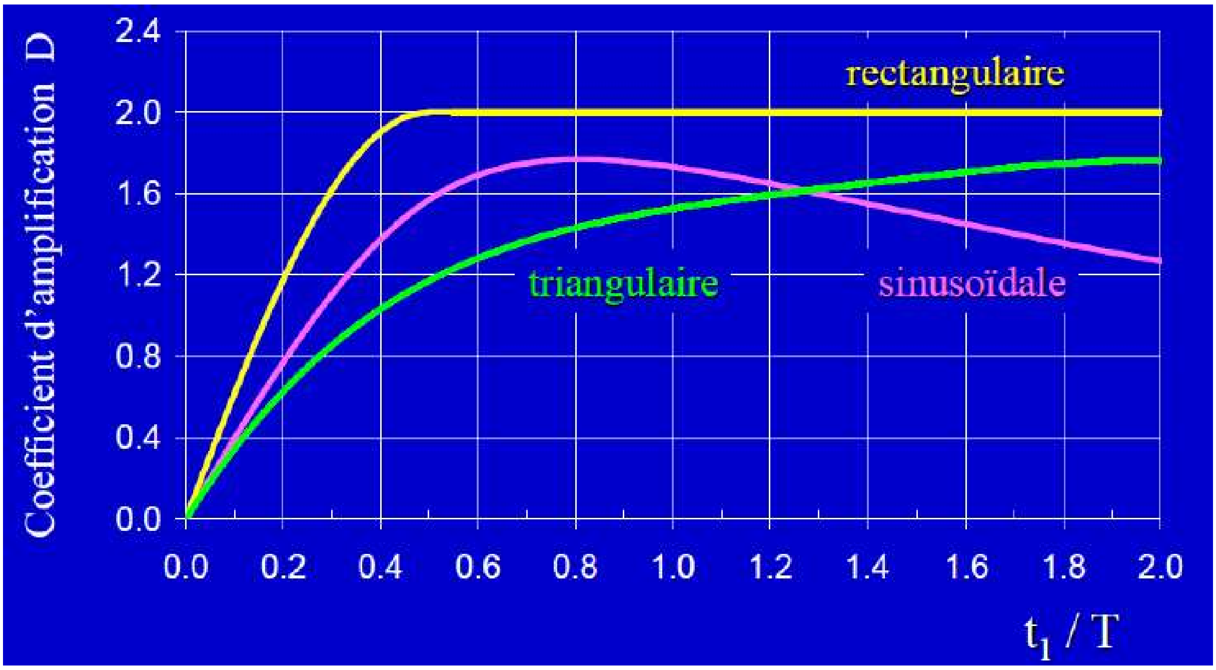

Fig. II.16 **Spectre de Choc**

L'examen de la réponse d'un oscillateur à une impulsion de ces types, ou d'autres, montre que de façon générale la réponse maximale de l'oscillateur se produit pendant la durée du choc si le rapport t_1/T est supérieur à 0.5 et que pour les valeurs élevées de t_1/T (>1) la valeur maximale de l'amplification dépend de la variation temporelle de l'impulsion; une montée graduelle de la force produit une amplification moindre qu'une montée soudaine (comparer sur cette figure les réponses à la sollicitation sinusoïdale et à l'impulsion rectangulaire).

Pour des durées de choc telles que t_1/T <0.5, la réponse maximale se produit pendant la phase de vibration libre suivant la phase d'impulsion et dépend de la valeur de l'impulsion totale $I = \int_0^{t1} p(t)dt$

4. SOLLICITATION QUELCONQUE

La sollicitation est définie par sa variation temporelle p(t) qui peut toutefois être périodique (voir chapitre 1) ou totalement quelconque. Les techniques d'obtention de la solution diffèrent suivant cette particularité mais s'inspirent des développements présentés précédemment pour la sollicitation harmonique ou impulsive.

4.1. *SOLLICITATION PERIODIQUE (anharmonique)*

Une fonction périodique, de période (Tp), peut être décomposée en la somme d'un nombre infini d'harmoniques en utilisant les séries de Fourier.

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) \qquad \text{II.57}$$

Que l'on peut également écrire de façon condensée en utilisant les nombres complexes :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{\frac{2i\pi k}{T_p} t} \qquad \text{II.58}$$

Les coefficients (C_k) sont les coefficients de Fourier de la fonction p(t), donnés par :

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \, e^{-\frac{2i\pi k}{T_p} t} \, dt \qquad \text{II.59}$$

Tenant compte de la relation linéaire (II.58), la réponse stationnaire de l'oscillateur est alors simplement obtenue en résolvant l'équation de la vibration forcée pour chaque harmonique ω_k et en additionnant les réponses ainsi obtenues. La solution pour une sollicitation harmonique a été obtenue au paragraphe 1. En conservant les notations complexes introduites dans ce paragraphe, la solution pour une harmonique ω_k d'amplitude unité s'écrit :

$$u(t) = H(\omega_k) \, e^{i\omega_k t} \qquad \text{II.60}$$

Où :

$$H(\omega_k) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta^2) + 2i\beta\,\xi} \quad , \qquad \beta = \frac{\omega_k}{\omega} = \frac{2\pi k}{T_p} \frac{1}{\omega} \qquad \text{II.61}$$

L'équation (II.61) est l'analogue en notations complexes du deuxième terme du membre de droite de l'équation décrivant la réponse globale du système soumis à une charge harmonique; elle est obtenue aisément en cherchant la solution stationnaire de l'équation du mouvement dans laquelle la sollicitation extérieure (membre de droite de l'équation) est égale à $e^{i\omega_k t}$

La quantité H(ωk) représente la *fonction de transfert* de l'oscillateur simple, c'est-à-dire sa réponse lorsqu'il est soumis à une sollicitation harmonique d'amplitude unité.

La réponse stationnaire de l'oscillateur soumis à la sollicitation p(t) est alors donnée par :

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, H\left(\frac{2\pi k}{T_p}\right) e^{\frac{2i\pi k}{T_p}t} \qquad \text{II.62}$$

4.2. SOLLICITATION NON PERIODIQUE

Toute sollicitation quelconque p(t) peut être considérée comme égale à la somme d'impulsions p(τ) dτ agissant à l'instant t = τ (figure II.17). Cette impulsion produit la réponse dont la solution élémentaire est donnée par l'équation (II.55). Le déplacement incrémental vaut donc :

$$du(t) = h(t-\tau)p(\tau)\,d\tau \qquad \text{II.63}$$

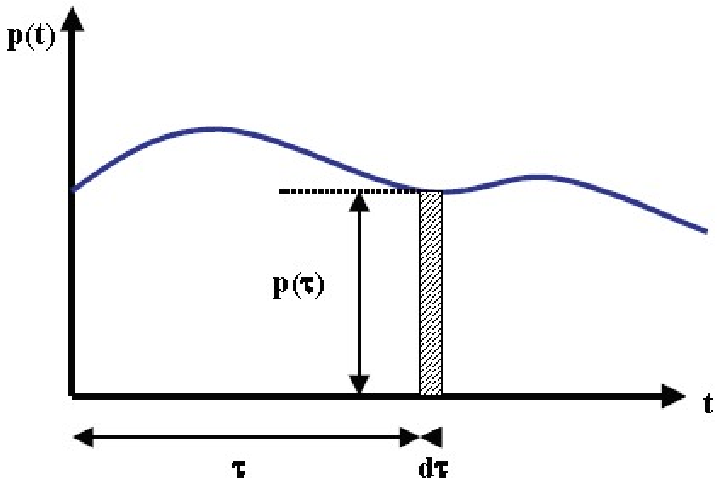

Fig. II.17 **. Principe de l'obtention de l'intégrale de Duhamel**

La réponse à l'instant t est la somme des réponses aux impulsions produites aux temps $\tau < t$, soit :

$$u(t) = \frac{1}{m\,\omega_D} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\xi\,\omega(t-\tau)} \sin\left[\omega_D (t-\tau)\right] d\tau \qquad \text{II.64}$$

Cette intégrale de convolution est connue sous le nom *d'intégrale de Duhamel* caractérisant la réponse d'un oscillateur simple initialement au repos à une sollicitation quelconque p(t).
Si p(t) n'est pas connue analytiquement, ou est représentée par une fonction compliquée, l'intégrale de Duhamel doit être évaluée numériquement. Cette intégration numérique ne se révèle pas particulièrement compétitive et il est souvent préférable d'intégrer directement l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de l'oscillateur c'est le cas par exemple du schéma d'intégration numérique possible traitant l'oscillateur non-linéaire.

Une méthode alternative d'obtention de la réponse de l'oscillateur à une sollicitation quelconque est similaire à celle décrite pour une sollicitation périodique; elle fait appel à la transformée de Fourier de la fonction p(t) qui s'exprime non plus en fonction d'une série, mais d'une intégrale :

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega)\, d\omega \qquad \text{II.65}$$

$P(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction p(t) et s'exprime :

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \text{II.66}$$

De façon analogue à l'équation (II.62), la réponse de l'oscillateur est :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, P(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad \text{II.67}$$

Si l'évaluation de l'intégrale (eq II.66) pour la détermination de la transformée de Fourier ne pose pas de difficulté, l'évaluation de la transformée de Fourier inverse (eq II.67) nécessite le recours à une intégration le long de contours dans le plan complexe. Cette technique n'est jamais utilisée dans la pratique car difficile de mise en œuvre analytiquement.

L'intégration numérique de ces intégrales nécessite de les tronquer pour les restreindre à un intervalle fini; cette troncature est mathématiquement équivalente à rendre la fonction p(t) périodique.

Considérons donc une sollicitation p(t) de durée finie t_d. La réponse maximale de l'oscillateur à cette sollicitation peut intervenir après la fin de la sollicitation; il est donc nécessaire de déterminer cette réponse sur une durée T_0 suffisamment longue. Typiquement, si la réponse maximale se produit après la fin de la sollicitation, elle sera atteinte au cours du premier demi-cycle de vibration libre puisque, en raison de l'amortissement, cette réponse s'atténue au cours du temps. La durée d'analyse doit donc être telle que :

$$T_0 \geq t_d + \frac{T}{2} \qquad \text{II.68}$$

où T est la période propre de l'oscillateur.

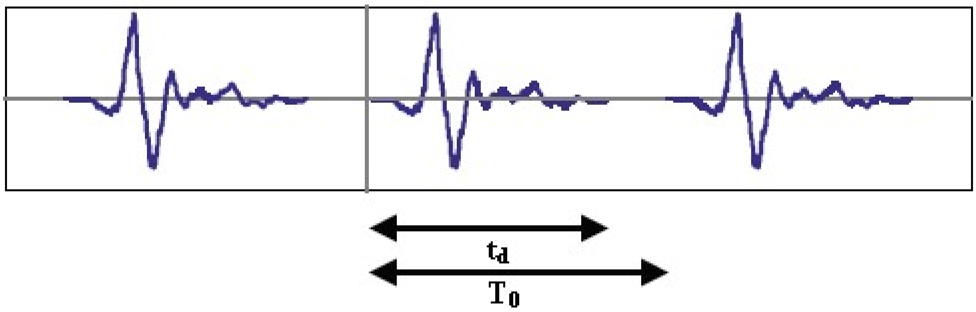

Fig. II.18 **Extension périodique de la sollicitation**

Si au-delà d'un temps supérieur à T_0, la fonction p(t) est reproduite à l'identique (figure ci-dessus), la sollicitation est rendue périodique et susceptible du traitement exposé au paragraphe 4.1 pour les sollicitations périodiques de type non harmonique.

La solution est donc obtenue en exprimant cette fonction périodique en série de Fourier, en résolvant l'équation d'équilibre pour chaque harmonique et en superposant les réponses. On dit que la réponse est obtenue par *analyse fréquentielle*.

Avec l'avènement des algorithmes de transformation de Fourier rapide (FFT), cette méthode de résolution est devenue très performante d'un point de vue numérique. La solution est d'autant plus précise que la durée T_0 choisie est grande. Les conditions initiales qui devraient être nulles ne le seront à la limite que si $T_0 \rightarrow \infty$. Pour un oscillateur "normalement amorti", il est possible de choisir une valeur raisonnable de T_0 permettant de respecter approximativement ces conditions initiales. De plus, dans ce cas la contribution de la réponse transitoire, non prise en compte dans la méthode, devient négligeable.